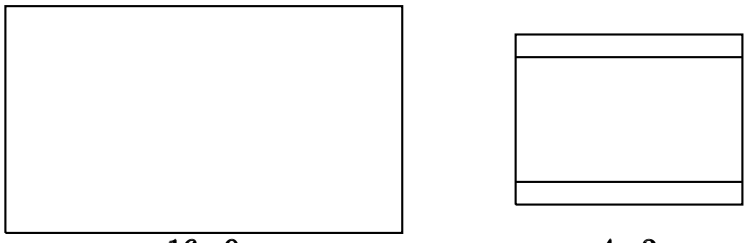
Solución de la prueba nivel 2do. OCEPB 2016
Responsable M.Sc. David Fernández Ramos

1. Las pantallas de las televisiones viejas tienen sus lados a razón de 4 : 3 mientras que las nuevas tienen sus pantallas en razón 16 : 9. Una película llena exactamente la pantalla de razón 16 : 9, pero al verla en la otra pantalla cuando se ajusta al espacio mas largo, deja un cierto espacio a lo ancho sin usar. ¿Cuál es la proporción de la pantalla que no se usa?



(a) $\frac{1}{3}$ **(b) $\frac{1}{4}$** (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{1}{6}$ (e)Ninguno

Solución.-
Tenemos la relación entre dos áreas:
Tenemos que 16 : 9 es una relación que puede escribirse como: $\frac{16}{9}$, donde el $ancho = 9$ y $largo = 16$, entonces el área de los televisores nuevos es: $A_1 = 9 \times 16 = 144$
También 4 : 3 es una relación que puede escribirse como: $\frac{4}{3}$, donde el $ancho = 3$ y $largo = 4$, entonces el área de los televisores antiguos es: $A_2 = 4 \times 3 = 12$
Ahora para encontrar el área no usada tenemos que realizar: $A = A_2 - A_1 =$??
Pero 4 : 3 podemos escribirla como: $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{16}{12} = \frac{20}{15} = ...$
Entonces el área de los televisores antiguos (para compararla con el área de las nuevas) es: $\widehat{A_2} = 12 \times 16 = 192$
Por tanto el área no usada es: $A = \widehat{A_2} - A_1 = 192 - 144 = 48$
Ahora la proporción de la pantalla que no se usa es:

$$\frac{A_2}{A} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

2. Si haces la división de 1 entre 5^{2016}, ¿Cuál sera el ultimo dígito que aparezca antes de llegar a puros 0's?

(a) 2 (b) 4 **(c) 6** (d) 8 (e) Ninguno

Solución.-
Tenemos que: $\frac{1}{5^{2016}} = 0{,}00\ldots00x\ldots y000\ldots$ donde el termino que nos piden es y
Ahora tenemos: $\frac{1}{5^{2016}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2016} = (0{,}2)^{2016}$
Entonces nuestro problema se reduce a encontrar el ultimo termino de $(0{,}2)^{2016}$
Ahora realizando algunos cálculos tenemos:

$(0,2)^1$	0,200000000...	Ultimo dígito antes de los ceros 2
$(0,2)^2$	0,040000000...	Ultimo dígito antes de los ceros 4
$(0,2)^3$	0,008000000...	Ultimo dígito antes de los ceros 8
$(0,2)^4$	0,001600000...	Ultimo dígito antes de los ceros 6

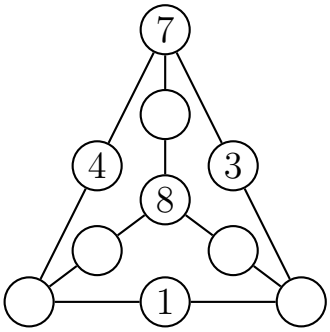
$(0,2)^5$	0,000320000...	Ultimo dígito antes de los ceros 2
$(0,2)^6$	0,000064000...	Ultimo dígito antes de los ceros 4
$(0,2)^7$	0,000012800...	Ultimo dígito antes de los ceros 8
$(0,2)^8$	0,000002560...	Ultimo dígito antes de los ceros 6

Observamos que cada 4 veces se repiten los últimos dígitos que son: $2, 4, 8, 6$
Ahora tenemos:

$$\frac{1}{5^{1016}} = (0{,}2)^{2016} = (0{,}2)^{4\times 504} = \left((0{,}2)^{504}\right)^4$$

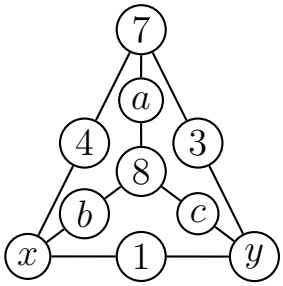
Por tanto tenemos que el ultimo dígito que aparece antes de llegar a puros ceros es: 6

3. En cada circulo de la figura se inscribe un número entero. Algunos de los números ya están escritos. Si la suma de cualesquiera tres números alineados es la misma, ¿Cuál es la suma de todos los números que faltan?



(a) 19 (b) 22 (c) 25 **(d) 29** (e) Ninguno

Solución.-
Veamos la gráfica



De acuerdo a la condición se tiene que tener:

$$7 + 4 + x = 7 + 3 + y = x + y + 1$$

$$11 + x = 10 + y = x + y + 1$$

De la igualdad $10 + y = x + y + 1$, tenemos: $10 = x + 1$, entonces $x = 9$
De la igualdad $11 + x = 10 + y$, tenemos: $y = 10$

Ahora sabemos que la suma de tres números alineados vale: 20
Por lo tanto: $a = 5$, $b = 3$ y $c = 2$.
Finalmente la suma: $x + y + a + b + c = 29$

4. ¿Cuántos enteros positivos n cumplen que al dividir 399 entre n queda 14 como residuo?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 **(d) 4** (e) Ninguno

Solución.-
Recordando que en una división tenemos:

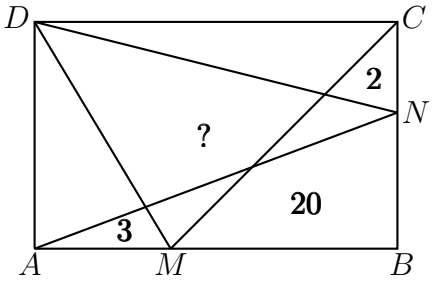
$$D = d \times c + r$$

Entonces: $399 = n \times c + 14$, de donde: $385 = n \times c$
Ahora tenemos: $385 = 5 \times 7 \times 11$

$n = 1$	$c = 385$
$n = 5$	$c = 77$
$n = 7$	$c = 55$
$n = 11$	$c = 35$
$n = 35$	$c = 11$
$n = 55$	$c = 7$
$n = 77$	$c = 5$
$n = 385$	$c = 1$

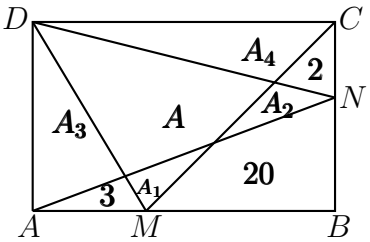
Ahora una condición de la división nos indica que el valor de n tiene que ser mayor a 14.
Por lo tanto solo 4 números cumplen lo pedido.

5. En el rectángulo de la figura esta dividido en 8 regiones. Las áreas de tres de las regiones son 2, 3 y 20 según se indica en la figura. Encuentra el área de la región marcada con "?"

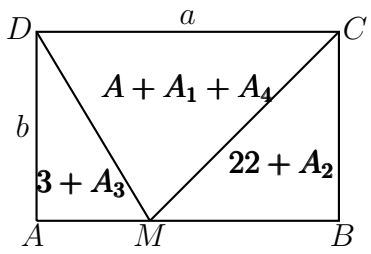


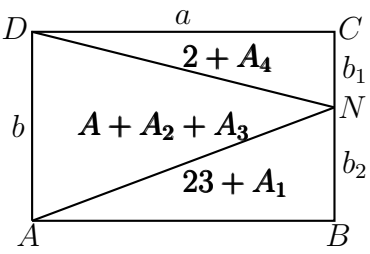
(a) 15 (b) 20 **(c) 25** (d) 30 (e) Ninguno

Solución.-
Consideremos la gráfica:



Ahora separando las áreas, tenemos las siguientes gráficas





Entonces tenemos:
$A + A_1 + A_4 = \frac{1}{2}ab$ y también que: $2 + A_4 = \frac{1}{2}ab_1$ y $23 + A_1 = \frac{1}{2}ab_2$
Como $b_1 + b_2 = b$, entonces $25 + A_1 + A_4 = \frac{1}{2}ab$
Ahora igualando: $A + A_1 + A_4 = 25 + A_1 + A_4$
Por lo tanto: $A = 25$