XIII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA EULER 2020
4to. de secundaria
Responsable Ing. Vidal Matias Marca

1. Solución.-
   Tenemos que
   $$(x-12)(x+12) = x^2 - 144 = 3^{x-11}$$
   Entonces ambos
   $$x-12 \quad \text{y} \quad x+12$$
   son potencias de 3, la diferencia entre ellos es 24, por lo tanto la única posibilidad es que
   $$x-12 \ \text{ sea 3 y } \ x+12 \ \text{ sea 27}$$
   de donde $x = 15$

2. Solución.-
   Se puede observar que el primer dígito debe ser menor o igual a 3 y mayor que 0

   Si el primer dígito es 3 entonces el resto debe ser 0, pero esto no es posible porque la última cifra debe ser mayor que 1
   Si el primer dígito es 2 entonces la tercera cifra debe ser mayor que 1 al mismo tiempo que las cifras restantes son 0, lo cual es posible solamente para 2020
   Si la primera cifra es 1 entonces la segunda cifra es mayor a 1 y la única posibilidad es 1210

   por lo tanto hay 2 números

3. Solución.-
   Para que se pueda simplificar una fracción del tipo $\frac{20}{n}$, el 2 ó el 5 deben dividir a n
   $$\left[\frac{2020}{2}\right] = 1010$$
   números que son divisibles por 2 y menores o iguales a 2020
   $$\left[\frac{20}{2}\right] = 10$$
   números que son divisibles por 2 y menores o iguales a 20
   Por lo tanto hay $1010 - 10 = 1000$ fracciones que se pueden simplificar al dividirlas por 2.
   $$\left[\frac{2020}{5}\right] = 404$$
   números que son divisibles por 5 y menores o iguales a 2020
   $$\left[\frac{20}{5}\right] = 4$$
   números que son divisibles por 5 y menores o iguales a 20
   Por lo tanto hay $404 - 4 = 400$ fracciones que se pueden simplificar al dividirlas por 5.

En total $1000 + 400 = 1400$, pero estamos contando doble a las fracciones que son divisibles tanto por el 2, como por el 5, es decir, aquellas que son divisibles por 10

$$\left[\frac{2020}{10}\right] = 202$$

números que son divisibles por 10 y menores o iguales a 2020

$$\left[\frac{20}{10}\right] = 2$$

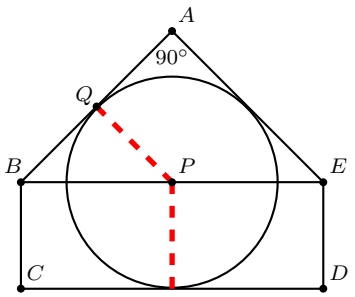
números que son divisibles por 10 y menores o iguales a 20
Por lo tanto hay $202 - 2 = 200$ fracciones que se pueden simplificar al dividirlas por 10

Entonces hay

$$1400 - 200 = 1200$$

fracciones que se pueden simplificar

4. <u>Solución</u>.-



Sea P el centro de la circunferencia, Q un punto en AB tal que PQ es perpendicular a AB, sea r el radio de la circunferencia

La altura del rectángulo $BCDE$ coincide con el radio de la circunferencia
El triángulo BAE es triángulo rectángulo e isósceles, también triángulo el triángulo BPQ, por el teorema de Pitágoras

$$(BP)^2 = (PQ)^2 + (QB)^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$$

por lo que $BP = \sqrt{2}r$ de donde al ser BP la mitad de BE, la base del rectángulo es $2\sqrt{2}r$,por lo tanto el área del rectángulo es $2\sqrt{2}r^2$

El área del triángulo ABP es r^2 y como el área del triángulo ABP es la mitad de la del triángulo ABE, entonces área de ABE es $2r^2$

$$Area(ABCDE) = Area(BCDE) + Area(ABE) = 2\sqrt{2}r^2 + 2r^2 = 2020$$

Por lo tanto

$$r^2 = \frac{2020}{2(\sqrt{2}+1)}$$

El área del círculo es

$$\frac{2020\pi}{2(\sqrt{2}+1)}$$