XIII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA EULER 2020
6to. de secundaria
Responsable Ing. Vidal Matias Marca

1. Solución.-
   Considere el polinomio:
   $$p(t) = t^3 + at^2 + bt + c$$
   donde x, y, z son las raíces de este polinomio.
   Entonces:
   $$x + y + z = -a$$
   de donde tenemos: $a = -4$
   Ademas:
   $$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz)$$
   de donde: $xy + xz + yz = 1$, entonces: $b = 1$.
   Por tanto, tenemos que:
   $$p(t) = t^3 - 4t^2 + t + c$$
   Ahora:
   $$p(x) = x^3 - 4x^2 + x + c = 0$$
   $$p(y) = y^3 - 4y^2 + y + c = 0$$
   $$p(z) = z^3 - 4z^2 + z + c = 0$$
   De donde obtenemos: $c = 6$.
   Finalmente:
   $$p(t) = t^3 - 4t^2 + t + 6 = (t + 1)(t - 2)(t - 3)$$
   Por lo tanto, la solución del sistema es la terna $(-1, 2, 3)$ y cualquier permutación entre ellas.

2. Solución.-
   Con números de un solo dígito, se tiene la cadena
   $$1333555557777777999999999$$
   que tiene $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ dígitos.

   Hay 45 números impares de dos dígitos, que comienzan con 11 y terminan con 99, la parte de la cadena que se tiene con números de dos dígitos tiene
   $$2 \times (11 + 13 + \ldots + 97 + 99) = 2 \times 110 \times \frac{45}{2} = 4950$$
   Entonces, usando todos los números impares de uno y dos dígitos, obtenemos una cadena con 4975 dígitos, que es más que 2020. Por lo tanto, el dígito 2020 estará en algún lugar de la parte de la cadena formada por números impares de dos dígitos.

   Sea x un número impar de dos dígitos, entonces la longitud de la cadena formada usando todos los números hasta x incluyendo las x copias de x es
   $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 2(11 + 13 + \ldots + x) = 2(1 + 3 + \ldots + x) - 25$$

de donde obtenemos

$$2(1+3+\ldots+x)-25=\frac{(1+x)^2}{2}-25=2020$$

por lo tanto

$$x=\sqrt{4090}-1$$

Dado que $4096=64^2$, x estará en algún lugar de 63, por lo que el dígito 2020 será

$$6 \text{ o } 3$$

Dado que los números de un solo dígito forman el primero 25 dígitos de la cadena, en la parte del número de dos dígitos de la cadena, los dígitos de la posición pares están formados por las decenas de los números, y los dígitos de la posición impar son los dígitos de las unidades de los números. Así que el dígito 2020 debe ser 6.

3. Solución.-
Sin la restricción, hay 4 formas de responder cada una de las 6 preguntas, por lo tanto hay

$$4^6$$

Hay dos formas de no tener en cuentas las instrucciones: una persona puede dar a las 6 preguntas la misma respuesta, o la persona puede dar a 5 preguntas la misma respuesta y una pregunta diferente.

a) Hay 4 formas de dar la misma respuesta a las 6 preguntas.

b) Para dar a 5 preguntas la misma respuesta y a una pregunta una respuesta diferente, primero se debe elegir cuál de las preguntas recibirá una respuesta diferente. Hay 6 formas de elegir.
Para cada una de esas 6 formas, hay 4 respuestas posibles para la pregunta seleccionada, y para cada una de las 4 respuestas, hay 3 respuestas posibles para asignar las cinco preguntas restantes.
En total, hay

$$6\times 4\times 3$$

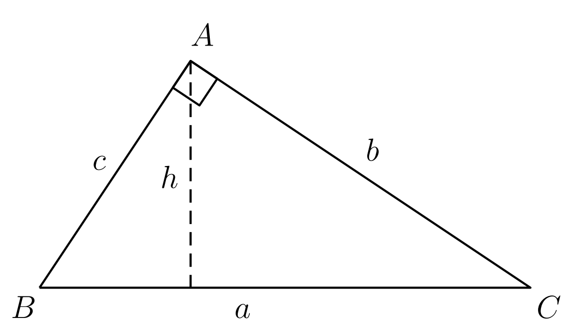
formas de dar la misma respuesta a exactamente 5 preguntas.

Por lo tanto habrá

$$4^6-(6\times 4\times 3+4)$$

respuestas válidas, de donde se tiene 4020

4. Solución.-



Consideramos el triángulo ABC con ángulo recto en A, entonces

$$A = \frac{1}{2}ah \quad ; \quad A = \frac{1}{2}cb$$

Igualando ambas expresiones tenemos $ah = cb$, por otro lado el perímetro $P = a + b + c = 96 \rightsquigarrow b + c = P - a$, elevando al cuadrado ambos miembros tenemos

$$(b + c)^2 = (P - a)^2$$

Desarrollando y despejando a tenemos

$$a = \frac{p^2}{2(h + P)}$$

de donde $a = 40$, tambien tenemos

$$cb = 768 \quad ; \quad b + c = 56$$

de donde obtenemos que los otros lados son 24 y 32