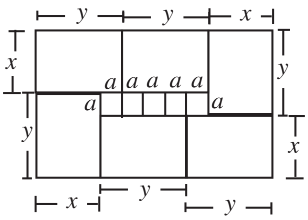
VI OLIMPIADA DE MATEMÁTICAS DE GALOIS
1^{ro} DE SECUNDARIA
17 de octubre 2015

1. **Solución:**

Jarra de 8 litros	Jarra de 5 litros	Jarra de 3 litros
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
0	4	4

2. **Solución:**
El número 10 es el suertudo por que $1^2+0^2=1$, el número 11 no es suertudo por que $1^2+1^2=2$, el número 12 no es suertudo por que $1^2+2^2=5$, el número 13 es suertudo por que $1^2+3^2=10$ y 10 es suertudo, entonces 31 también tiene que ser suertudo por que tiene los mismos dígitos.
Se puede probar del mismo modo que $14, 15, 16, 17$ y 18 no son suertudos. Luego $41, 51, 61, 71$ y 81 no son suertudos.
Una lista de los suertudos es la siguiente: $10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44, 49, 68, 70, 79, 82, 86, 91, 94$ y 97

3. **Solución:**



$6y+4x=324$ condicion de perimetro
$y=x+a \to a=y-x$
$2y+x=2x+5a$
Sustituimos $a=y-x$ en $2y+x=2x+5a$
$2y+x=2x+5(y-x) \to 4x-3y=0$

Luego Se tiene $\begin{cases} 4x-3y=0 \\ 4x+6y=324 \end{cases}$ resolviendo tenemos $x=27$, $y=36$
$\therefore A=(2y+x)(x+y)=99\times 63=6237$

4. **Solución:**
Los números son: $14\times 1, 14\times 2, 14\times 3, 14\times 4, 14\times 5, 14\times 6, 14\times 7$
$\therefore$ son 7 números

VI OLIMPIADA DE MATEMÁTICAS DE GALOIS
2^{do} DE SECUNDARIA
17 de octubre 2015

1. **Solución:**
El número de veces que aparece exactamente el patrón 2345 en la secuencia $123456789101112131 4\ldots 0$ esta dado de la siguiente manera

Caso de 1 cifra
cuando se escriben $1, 2, 3, \ldots, 9$ aparece una vez el patron $1\boxed{2345}6\ldots$
Caso de 4 cifras
Caso 1: cuando se escriben $\ldots, 2344, 2345, 2346, \ldots$ aparece una vez el patron $2344\boxed{2345}2346$
Caso 2: cuando se escriben:
$\ldots$,3452,3453,$\ldots$ aparece una vez el patron $345\boxed{2345}3$
Caso 3: cuando se escriben:
$\ldots$,4523,4524,$\ldots$, aparece una vez el patron $45\boxed{2345}24$
Caso 4: cuando se escriben:
$\ldots$,5234,5235,$\ldots$, aparece una vez el patron $5\boxed{2345}235$
Caso de 5 cifras
Caso 1: cuando se escriben:
$\ldots 12345, 12346, \ldots$, aparece una vez el patron $1\boxed{23451}2346$
Caso 2 : cuando se escriben:
$\ldots, 22344, 22345, 22346, \ldots$ aparece una vez el patron $223442\boxed{2345}22346$
Caso 3 : cuando se escriben:
$\ldots, 32344, 32345, 32346, \ldots$ aparece una vez el patron $323443\boxed{2345}32346$
Caso 4: cuando se escriben: $\ldots 23450, 23451, \ldots$, aparecen 10 veces el patron
$23449\boxed{23450}\boxed{23451}\boxed{23452}\boxed{23453}\boxed{23454}\boxed{23455}\boxed{23456}\boxed{23457}\boxed{23458}\boxed{23459}23460$
Caso 5: cuando se escriben:
34502,34503 aparece una vez el patron $3450\boxed{2345}03$

34512,34513 aparece una vez el patron $3451\boxed{2345}13$

34522,34523 aparece una vez el patron $3452\boxed{2345}23$

34532,34533 aparece una vez el patron $3453\boxed{2345}33$

34542,34543 aparece una vez el patron $3454\boxed{2345}43$

34552,34553 aparece una vez el patron $3455\boxed{2345}53$

34562,34563 aparece una vez el patron $3456\boxed{2345}63$

34572,34573 aparece una vez el patron $3457\boxed{2345}73$

34582,34583 aparece una vez el patron $3458\boxed{2345}83$

34592,34593 aparece una vez el patron $3459\boxed{2345}93$

De donde se sigue que hay en total 28 apariciones del patrón 2345.

2. **Solución:**
Si la suma tuviera cuatro cifras, se debería tener un número con tres dígitos 9 y un dígito 1 em menor

de estos números es 1999. Pero lo máximo que se tiene al sumar dos números con las condiciones dadas es

$$910 + 999 = 1909$$

O sea que la suma obtenida sólo tiene tres cifras: dos cifras 9 y una cifra 1. Hay 3 casos que analizar; 199, 919 y 991.
El primer caso, resulta imposible, la cifra de las centenas es solo 1. Los dos casos restantes son muy parecidos, hay un valor para las unidades (9, 1 respectivamente) y decenas (0, 8 respectivamente), y el valor de las centenas depende puede tomar varias opciones del 1 al 8.

Caso 919 :	110	210	310	410	510	610	710	810
	809	709	609	509	409	309	209	109
Caso 991 :	110	210	310	410	510	610	710	810
	881	781	681	581	481	381	281	181

3. **Solución:**
Sea la figura con lados n y m entonces se tiene que el número de círculos blancos es igual a $(n-2)2+2m$, por otro lado el número de círculos rojos es igual a $(n-2)(m-2)$ y entonces se tiene

$$(n-2)2 + 2m = (n-2)(m-2)$$

Simplificando tenemos

$$4n + 4m - nm - 8 = 0$$

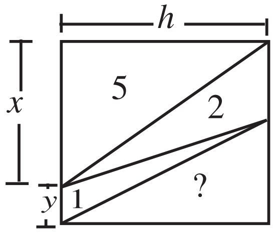
Resolviendo para n tenemos

$$n = \frac{8-4m}{4-m} = \frac{4(4-m)-8}{4-m} = 4 - \frac{8}{4-m}$$

Para que esta expresión sea entera tenemos los siguientes casos

$m = 5$	$n = 12$
$m = 6$	$n = 8$
$m = 8$	$n = 6$
$m = 12$	$n = 5$

4. **Solución:**



Note que el área de los triángulos de área 5 y 1 son respectivamente $\frac{xh}{2}$ y $\frac{yh}{2}$ de donde

$$\frac{xh}{2} + \frac{yh}{2} = 5 + 1$$

$$\frac{(x+y)}{2} = 6 \Rightarrow (x+y)h = 12$$

Es decir el área del cuadrado es 12, como la suma de los tres áreas de los triángulos dados es 8 se deduce que el área pedido es 4.
$\therefore A = 4$

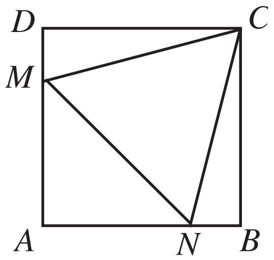
VI OLIMPIADA DE MATEMÁTICAS DE GALOIS
3^{ro} DE SECUNDARIA
17 de octubre 2015

1. **Solución:**
Sea $\overline{xyz}$ el número, entonces

$$\begin{cases} x+y+z=18 \\ z=2y \\ \overline{xyz}-\overline{zyx}=297 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=18 \\ z=2y \\ 100(x-z)+10(y-y)+z-x=297 \end{cases}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene $x=9, y=3$ y $z=6$
$\therefore$ el número inicial es 936

2. **Solución:**



Lo primero que hay que notar que los triángulos $\triangle CDM$ y $\triangle CBN$ tienen las mismas dimensiones. Es decir que $\overline{DM}=\overline{BM}$, de donde $\overline{AM}=\overline{AN}$.
Luego por pitagoras $\overline{AM}^2+\overline{AN}^2=\overline{MN}^2$, $\overline{DM}^2+\overline{DC}^2=\overline{MC}^2$

Notar que $\overline{MN}=\overline{MC}$, $\overline{DC}=1$ y $\overline{AM}+\overline{DM}=1$ de donde

$$\left.\begin{array}{l} 2\overline{AM}^2=\overline{MN}^2 \\ (1-\overline{AM})^2+1=\overline{MN}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (1-\overline{AM})^2+1=2\overline{AM}^2$$

Luego de simplificar las expresiones algebraicas se obtiene: $\overline{AM}=\sqrt{3}-1$ y $\overline{MN}^2=2(\sqrt{3}-1)^2$
Como el área de un triángulo equilátero $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$ donde ℓ es su lado, se obtiene el área pedida:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{MN}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}2(\sqrt{3}-1)^2=2\sqrt{3}-3$$

3. **Solución:**
Notar que hay una relación en las columnas del triángulo. Cada columna es una serie geométrica de razón 4.

1		2		3		4		5		6		7
	3		5		7		9		11		15	
		8		12		16		20		28		
			20		28		36		48			
				48		64		80				
					112		144					
						256						

Por ejemplo 4, $16=4\times 4$, $64=4\times 4^2$ y $256=4\times 4^3$ es una serie geométrica, note también que hay un término por cada dos filas.

$$\begin{array}{cccc|c|cccc}
1 & & \dots & & 10 & & \dots & & 19 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & & \vdots & & \vdots & & & \\
 & & & & x & & & &
\end{array}$$

Luego el vértice x del triángulo con 19 números estará debajo del número central 10 y dicho número será el 10 término de la sucesión geométrica de razón 4. Es decir $x = 10 \times 4^9 = 5 \times 2^{19}$

4. **Solución:**
   Si llamamos S_i la suma de los dígitos de a_i tenemos:

$$\begin{array}{rcl}
S_1 & = & 9 \\
S_2 & = & 2 \times 9 \\
S_3 & = & 2^2 \times 9 \\
S_4 & = & 2^3 \times 9 \\
S_5 & = & 2 \times 9 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
S_{2015} & = & 2^{2014} \times 9
\end{array}$$

   Por lo tanto la suma de todos los dígitos es $S_{2015} = 2^{2014} \times 9$

VI OLIMPIADA DE MATEMÁTICAS DE GALOIS
4^{TO} DE SECUNDARIA
17 de octubre 2015

1. **Solución:**

2^1 termina en 2	2^2 termina en 4	2^3 termina en 8	2^4 termina en 6
2^5 termina en 2	2^6 termina en 4	2^7 termina en 8	2^8 termina en 6
2^9 termina en 2	2^{10} termina en 4	2^{11} termina en 8	2^{12} termina en 6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2^{1+4n} termina en 2	2^{2+4n} termina en 4	2^{3+4n} termina en 8	2^{4+4n} termina en 6

$\left(((2^1)^2)^3\cdots\right)^{2015} = 2^{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdots 2015}$ esto termina en 6 pues $1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdots 2015$ termina en varios ceros al menos en dos, luego el número $1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdots 2015$ es divisible por 4 y así $2^{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdots 2015}$ termina en 6

2. **Solución:**
Sea $\overline{xyz}$ el número, entonces

$$\begin{cases} x+y+z=18 \\ z=2y \\ \overline{xyz}-\overline{zyx}=297 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=18 \\ z=2y \\ 100(x-z)+10(y-y)+z-x=297 \end{cases}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene $x=9, y=3$ y $z=6$
$\therefore$ el número inicial es 936

3. **Solución:**
Si llamamos S_i la suma de los dígitos de a_i tenemos:

$$\begin{array}{rcl} S_1 &=& 9 \\ S_2 &=& 2\times 9 \\ S_3 &=& 2^2\times 9 \\ S_4 &=& 2^3\times 9 \\ S_5 &=& 2\times 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{2015} &=& 2^{2014}\times 9 \end{array}$$

Por lo tanto la suma de todos los dígitos es $S_{2015}=2^{2014}\times 9$

4. **Solución:**
$1+n(n+2)=n^2+2n+1=(n+1)^2$
si $n=2013$ $\quad\sqrt{1+2013(2015)}=\sqrt{2014^2}=2014$
si $n=2012$ $\quad\sqrt{1+2012(2014)}=\sqrt{2013^2}=2013$
si $n=2011$ $\quad\sqrt{1+2011(2013)}=\sqrt{2012^2}=2012$
si $n=2010$ $\quad\sqrt{1+2010(2012)}=\sqrt{2011^2}=2011$
$\therefore \sqrt{1+2010\sqrt{1+2011\sqrt{1+2012\sqrt{1+2013\times 2015}}}}=2011$

VI OLIMPIADA DE MATEMÁTICAS DE GALOIS
5^{TO} DE SECUNDARIA
17 de octubre 2015

1. **Solución:**
$7+77+777+\ldots+\underbrace{777\cdots7}_{\text{2015 veces}}$
la cifra de las unidades es la unidad de $\underbrace{7+7+\ldots+7}_{2015}=2015\times7=14105$
la cifra de las decenas es $\underbrace{7+7+\ldots+7}_{2014}+1410=15508$
la cifra de las centenas es $\underbrace{7+7+\ldots+7}_{2013}+1550=15641$
la cifra de las centenas en $7+77+\ldots+\underbrace{777\cdots7}_{\text{2015 veces}}$ es 1

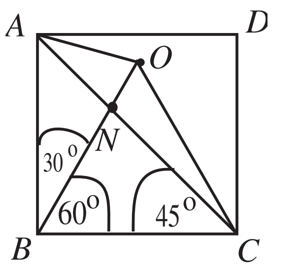
2. **Solución:**
2^2, $4^{15}=2^{30}$, $8^{11}=2^{33}$, $12^8=2^{16}\cdot3^8$ y $32^6=2^{30}$
Comparando 2^{33} y $2^{16}\cdot3^8$
se tiene $\dfrac{2^{33}}{2^{16}\cdot3^8}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^8\cdot2>1$ pues $\frac{4}{3}>1$ por tanto $2^{33}>2^{16}\cdot3^8$
$\therefore 8^{11}=2^{33}$ es el más grande

3. **Solución:**

A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		2		3		4		5
	9		8		7		6	
10		11		12		13		14
	18		17		16		15	
19		20		21		22		23
	27		26		25		24	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1+9n	9n	2+9n	8+9n	3+9n	7+9n	4+9n	6+9n	5+9n

asignado a n valores enteros positivos se generan los números como se ve en la tabla
$2015=223\cdot9+8$ donde 223 es el cociente y el residuo es 8 de $2015\div9$
$\therefore$ 2015 esta de bajo la letra D

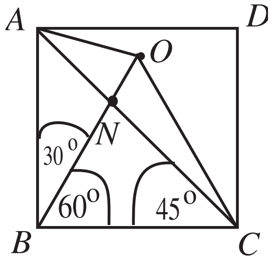
4. **Solución:**



$\overline{AB}=\overline{BO}$ por tanto $\angle OAB=\angle AOB=75^o$
El ángulo $\angle BNC=180-60-45=75^o$
como $\angle BNC=75^o\Rightarrow\angle ANO=75^o$
luego $\angle OAC+\angle ANO+\angle AOB=180^o\rightarrow\angle OAC=30^o$

VI OLIMPIADA DE MATEMÁTICAS DE GALOIS
6^{TO} DE SECUNDARIA
17 de octubre 2015

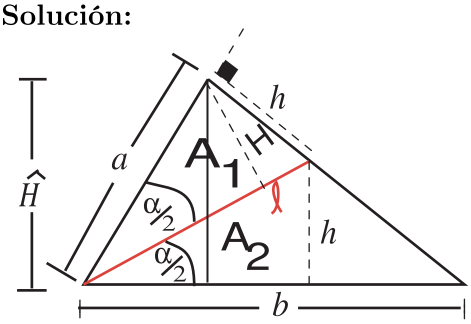
1. **Solución:**



$\overline{AB} = \overline{BO}$ por tanto $\angle OAB = \angle AOB = 75^o$
El ángulo $\angle BNC = 180 - 60 - 45 = 75^o$
como $\angle BNC = 75^o \Rightarrow \angle ANO = 75^o$
luego $\angle OAC + \angle ANO + \angle AOB = 180^o \to \angle OAC = 30^o$

2. **Solución:**
Del 1 al 9 hay 9 cifras
del 10 al 99 hay $(99 - 10 + 1)2 = 180$ cifras
del 100 al 200 hay $(200 - 100 + 1) = 303$ cifras
Por tanto del 1 al 200 hay 492 cifras
$492 \div 2 = 246$
$246 - 180 - 9 = 57$
$57 \div 3 = 19$
$x - 19 = 99;\ 118 - 19 = 99$
$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & 19 \\ 100 & 101 & 102 & \dots & 118 \end{array}$$
$1, 2, 3, 4, \dots, 11\underbrace{8, 1}_{T.C.}19, \dots, 200$
Por tanto el termino central es $T.C. = 81$

3. **Solución:**



$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{H}{a} \Rightarrow a \sin\frac{\alpha}{2}$
$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h}{\ell} \Rightarrow h = \ell \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
$A_1 = \frac{1}{2}\ell a \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right);\ A_1 = \frac{1}{2}\ell b \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right);\ \sin(\alpha) = \frac{\widehat{H}}{a}$
$A = \frac{1}{2}ba\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\ell a \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{2}\ell b \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\ell}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)(a+b)$
$\sin(\alpha) = \sin\left(2(\frac{\alpha}{2})\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
$\frac{1}{2}ab2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\ell}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)(a+b)$

$\ell = \frac{2ab}{a+b}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

4. **Solución:**
Sea el número buscado $\overline{ab}$ y sea $\overline{ba}$ cuando se intercambian sus cifras, entonces $\overline{ba} - \overline{ab} = 9$ o sea $10b + a - (10a + b) = 9 \Rightarrow 9b - 9a = 9 \Rightarrow b - a = 1$

$b-a=1$	$\overline{ba}-\overline{ab}=9$	
$1-0=1$	$10-1=9$	esto no se concidera
$2-1=1$	$21-12=9$	✓
$3-2=1$	$32-23=9$	✓
$4-3=1$	$43-34=9$	✓
$5-4=1$	$54-45=9$	✓
$6-5=1$	$65-56=9$	✓
$7-6=1$	$76-67=9$	✓
$8-7=1$	$87-78=9$	✓
$9-8=1$	$98-89=9$	✓

Por tanto hay 8 números buscados