

Facultad de Ciencias y Tecnología ▼ Departamento de Matemáticas ▼ Fecha: 26 de septiembre de 2015

2^{do} de secundaria

[illegible][illegible]

1. Cuando Lucy se sube a la báscula marca 67 kg. Cuando Betty se sube a la misma báscula, marca 59 kg. Cuando ambas se suben juntas a la misma báscula, marca 131 kg. Sólo entonces se dan cuenta que la flecha que señala los números está doblada. ¿Cuánto pesa realmente Lucy?
2. Sea $N = 1 \times 3 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 21 \cdots \times 91 \times 93 \times 97 \times 99$ el producto de todos los números naturales impares entre 1 y 99 que no terminen en 5. Halle el dígito de las unidades del número N .
3. Viviana y Miguel recibieron manzanas y peras de su abuela; ellos recibieron 25 frutas en total. Camino a casa, Viviana comió una manzana y tres peras, y Miguel comió 3 manzanas y 2 peras. Cuando llegaron a casa se dieron cuenta que en ese momento tenían, entre los dos, el mismo número de manzanas que de peras. ¿Cuántas peras recibieron de su abuela?
4. Cada fila empieza con 1 y termina con 2, los números que no son 1 ni 2 son suma de dos inmediatos anteriores uno izquierdo y el otro derecho, por ejemplo en la quinta fila el 14 es suma de 5 y 9 de la cuarta fila. Si continuamos este esquema de números halle, la suma de todos los números que aparecen en la fila décimo séptima.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
& & & & 1 & & 2 & & & & \\
& & & 1 & & 3 & & 2 & & & \\
& & 1 & & 4 & & 5 & & 2 & & \\
& 1 & & 5 & & 9 & & 7 & & 2 & \\
1 & & 6 & & 14 & & 16 & & 9 & & 2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$


Soluciones XIII Olimpiada Matemática GAUSS - 2015, nivel 2
Responsable Mgr. Alvaro Carrasco C.

1. Como la báscula tiene doblada la flecha que señala los números, sea $67 + a$ el peso real de Lucy y $59 + a$, entre ambas pesan $67 + a + 59 + a = 2a + 126$, y como la báscula marca 131 tenemos:

$$2a + 126 = 131 + a$$

de donde $a = 5$ y así Lucy pesa en realidad $67 + 5 = 72$.

2. Reordenamos este producto de números impares (no terminen en 5) como sigue: el producto de todos estos números impares que terminen en 3, 7 y 9

$$\begin{aligned} N = & 1 \cdot 11 \cdot 21 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 51 \cdot 61 \cdot 71 \cdot 81 \cdot 91 \cdot \\ & 3 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 33 \cdot 43 \cdot 53 \cdot 63 \cdot 73 \cdot 83 \cdot 93 \cdot \\ & 7 \cdot 17 \cdot 27 \cdot 37 \cdot 47 \cdot 57 \cdot 67 \cdot 77 \cdot 87 \cdot 97 \cdot \\ & 9 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 39 \cdot 49 \cdot 59 \cdot 69 \cdot 79 \cdot 89 \cdot 99 \end{aligned}$$

El producto de los que terminan en 1 osea la primera fila en un número cuya cifra de las unidades es 1, el producto de los que terminan en 3 osea la segunda fila en un número cuya cifra de las unidades es 9, el producto de los que terminan en 7 osea la tercera fila en un número cuya cifra de las unidades es 9 y el producto de los que terminan en 9 osea la cuarta fila en un número cuya cifra de las unidades es 1. Multiplicando estos productos parciales tenemos que el número N tiene por cifra de las unidades a 1.

3. Sea a el número de peras total de peras que ellos reciben, entonces $25 - a$ será el número total de manzanas. Cuando Viviana comió una manzana y tres peras, y Miguel comió 3 manzanas y 2 peras, en total "desaparecen" 4 manzanas y 5 peras y entonces el número total de peras e igual al de manzanas y tenemos:

$$\begin{aligned} 25 - a - 4 &= a - 5 \\ 21 - a &= a - 5 \end{aligned}$$

resolviendo tenemos que $a = 13$ peras.

4. Veamos las sumas por cada fila

1ra. fila	$1 + 2 = 1 + 2$
2da. fila	$1 + (1 + 2) + 2 = 2 \times 1 + 2 \times 2 = 2 \times 3$
3ra. fila	$1 + (1 + 1 + 2) + (1 + 2 + 2) + 2 = 4 \times 1 + 4 \times 2 = 2^2 \times 3$
4ta. fila	$1 + (1 + 1 + 1 + 2) + (1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2) + (1 + 2 + 2 + 2) + 2 = 8 \times 1 + 8 \times 2 = 2^3 \times 3$
5ta. fila	$1 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) + (1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2) +$ $(1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2) + (1 + 2 + 2 + 2 + 2) + 2 = 16 \times 1 + 16 \times 2 = 2^4 \times 3$
\vdots	\vdots
17ava. fila	$2^{16} \times 3 = 196\,608$

