

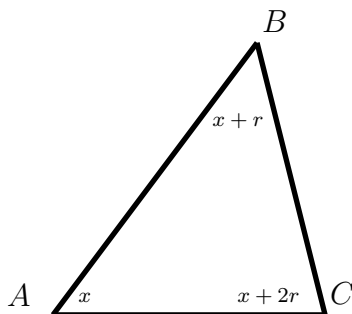
XXXIX OLIMPIADA DEPARTAMENTAL DE MATEMÁTICA
XVII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA EULER 2024
5^{to} DE SECUNDARIA

A.Paterno/A.Materno/Nombre(s):

Colegio/ N° telefónico domicilio:

Nota: Por favor escribe todos tus desarrollos y cálculos en una hoja blanca. Respuestas sin procedimiento serán anuladas. NO se permite el uso de calculadoras.

1. Se tiene un cubo, donde en cada cara se escribe un número entero positivo y en cada uno de los vértices del cubo el producto de los números de las caras adyacentes al vértice. Si la suma de los números asignados a los vértices es 506. Hallar la suma de todos los números de las caras del cubo
2. Hallar todos los pares de números naturales (x, y) tal que $x < y$. Si la suma de todos los números naturales comprendidos estrictamente entre ambos es igual a 1999.
3. Con los dígitos 1 ; 2 ; 3, se forma un número de diecisiete cifras tal que la diferencia entre dos cifras consecutivas es siempre 1 o -1. Cuantos números de diecisiete cifras hay?
4. Sea el triángulo ABC , donde L, M y N son los puntos medios de los lados BC, CA y AB . Sea H el pie de la altura que cae desde C (entre B y N). Por otro lado I es la intersección de LH y MN . Determinar el ángulo HIN



XXXIX olimpiada departamental de matemática 2024
Quinto de secundaria
Responsable Ing. Vidal Matias Marca

1. Sean x, y, z, u, v y w los números de cada cara, tal que las caras con los números

$$x, u \quad ; \quad y, v \quad ; \quad z, w$$

sean opuestas, entonces

$$xyw + xvw + xvz + xyz + uyz + uyw + uvw + uvz = 506$$

factorizando se obtiene

$$(x + u)(y + v)(z + w) = 506$$

por otro lado $506 = 2 \times 11 \times 23$, es decir que

$$x + u + y + v + z + w = 2 + 11 + 23 = 36$$

en algún orden, por lo tanto la suma de todos los números de las caras es: **36**

2. La suma de todos los números comprendidos entre x y y es

$$S = 1999 = \frac{(y - 1)y}{2} - \frac{x(x + 1)}{2}$$

de donde se obtiene

$$(y + x)(y - x - 1) = 2 \times 1999$$

Al ser 1999 un número primo, obtenemos que

$$y = 1001 \quad ; \quad x = 998$$

Por lo tanto se tiene un par de números: **(998, 1001)**

3. Se observa que el número de diecisiete cifras debe tener una de las dos formas siguientes

$$\boxed{2} \boxed{} \boxed{2} \boxed{} \boxed{2} \boxed{} \boxed{2} \boxed{} \boxed{2} \boxed{} \boxed{2} \boxed{} \boxed{2} \boxed{} \boxed{2} \boxed{} \boxed{2}$$

o

$$\boxed{} \boxed{2} \boxed{} \boxed{2} \boxed{} \boxed{2} \boxed{} \boxed{2} \boxed{} \boxed{2} \boxed{} \boxed{2} \boxed{} \boxed{2} \boxed{} \boxed{2} \boxed{}$$

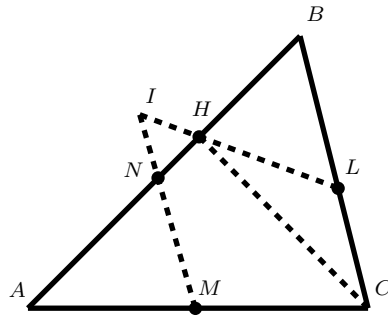
donde los cuadrado $\boxed{}$ debe ir 1 o 3, entonces se tiene para cada uno de los dos números de diecisiete cifras hay

$$2^8 \quad ; \quad 2^9$$

posibilidades, es decir $2^8 + 2^9 = 256 + 512 = 768$

Por lo tanto en total hay: **768** números de diecisiete cifras

4. Se tiene la figura



donde se observa que el ángulo en B interno del triángulo es $x + r = 60$

Al ser L el punto medio de BC , el triángulo HBL es equilátero, es decir sus ángulos internos son iguales y valen 60

De donde el ángulo $\angle BHL = \angle NHI = 60$

Por otro lado el $\angle ANM = \angle HBL$ por ser paralelo MN con BC , entonces $\angle ANM = \angle HBL = 60$

Por lo tanto el ángulo es: $\angle HIN = 60$