

XXXIX OLIMPIADA DEPARTAMENTAL DE MATEMÁTICA
XVII OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA EULER 2024
6^{to} DE SECUNDARIA

donde $\overline{AD} = \overline{AE}$ y el triángulo DEF es equilátero. Determinar el ángulo $\angle BAC$ para que el punto de intersección de las rectas BD y CE sea el centro de DEF

XXXIX olimpiada departamental de matemática 2024
Sexto de secundaria
Responsable Ing. Vidal Matias Marca

1. Reescribiendo la ecuación

$$x^2 + \frac{x^2 + 2}{2} + \frac{x^2 + 3}{3} + \dots + \frac{x^2 + 2024}{2024} = 2023$$

tenemos

$$\frac{x^2 + 1}{1} + \frac{x^2 + 2}{2} + \frac{x^2 + 3}{3} + \dots + \frac{x^2 + 2024}{2024} = 2024$$

entonces

$$(x^2 + 1) + \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) + \dots + \left(\frac{x^2}{2024} + 1\right) = 2024$$

de donde

$$x^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2024}\right) + 2024 = 2024$$

Por lo tanto

$$x^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2024}\right) = 0$$

el valor de x es: 0

2. Se tiene que $a^3 - a = a(a - 1)(a + 1)$ un producto de tres números consecutivos

Por otro lado $84 = 3 \times 4 \times 7$, se observa que el producto de tres números consecutivos es siempre múltiplo de 3, entonces falta ver que sea múltiplo de 4 y 7, es decir $a, (a - 1), (a + 1)$ uno de ellos debe ser múltiplo de 7 y para que sea múltiplo de 4, dos de ellos deben ser pares

se tiene las posibilidades siguientes

(5, 6, 7), no es posible

(6, 7, 8)

(7, 8, 9)

(12, 13, 14)

(13, 14, 15), no es posible

(14, 15, 16)

(19, 20, 21)

(20, 21, 22)

(21, 22, 23), no es posible

de donde se tiene 6 posibilidades, es decir a toma los valores de

$$7 ; 8 ; 13 ; 15 ; 20 ; 21$$

3. Reescribiendo

$$A = \sqrt{1 + 4 \times 2 + 4 \times 4 + 4 \times 6 + \cdots 4 \times 2022 + 4 \times 2024}$$

se tiene

$$A^2 = 1 + 4 \times 2 + 4 \times 4 + 4 \times 6 + \cdots 4 \times 2022 + 4 \times 2024$$

o bien

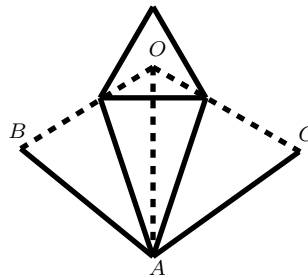
$$A^2 - 1 = 8(1 + 2 + 3 + \cdots 1012) \quad \rightsquigarrow \quad A^2 - 1 = 8 \left(\frac{1012 \times 1013}{2} \right)$$

es decir

$$(A - 1)(A + 1) = 2024 \times 2026$$

Por lo tanto, el valor de A es: 2025

4. se tiene la siguiente figura



Sea O el centro del triángulo DEF (punto de intersección de las rectas BD y CE), entonces los ángulos en O son todos iguales (dentro del triángulo DEF)

Se observa por simetría que el ángulo $\angle BOA = 60^\circ$ de donde se tiene que

$$\angle BAO = 30^\circ$$

Por lo tanto, el ángulo $\angle BAC$ es: 60°