

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN SIMÓN
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
15 DE JUNIO DE 2024

XXIII OLIMPIADA DE MATEMÁTICA "GAUSS" NIVEL 2

A.Paterno/A.Materno/Nombre(s):

Colegio/ N° telefónico domicilio:

Nota: Por favor escribe todos tus desarrollos y cálculos en una hoja blanca. Debes entregar tus hojas de desarrollo, en cada pregunta justifique sus respuestas.

1. ¿Cuántos enteros de 1 a 2024 no son cuadrados perfectos?. Un cuadrado perfecto es el cuadrado de un entero
2. Hallar un número entero positivo n , tal que la suma de n más su mayor divisor propio sea igual a 933.

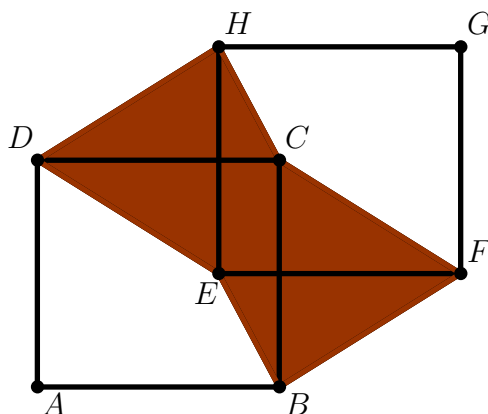
NOTA: Se denomina divisor propio de un número entero n , a otro número entero que es divisor de n , pero diferente de n . Ejemplo: los divisores propios de 28 son: 1, 2, 4, 7 y 14.

3. Determinar tres pares (m, n) , donde m y n son enteros positivos tal que los números

$$\frac{3n^2}{m} \quad ; \quad \sqrt{n^2 + m}$$

Sean números enteros.

4. En la figura $ABCD$ y $EFGH$ son dos cuadrados iguales. El área de la región sombreada es 1. ¿Cuál es el área del cuadrado $ABCD$?



XXIII Olimpiada Matemática 2024 "GAUSS"

Nivel 2

Responsable Ing. Vidal Matias Marca

1. Se tiene que

$$1^2 = 1 \quad ; \quad 2^2 = 4 \quad ; \quad 3^2 = 9 \quad ; \quad \dots \quad ; \quad 44^2 = 1936 \quad ; \quad 45^2 = 2025$$

de donde se obtiene que hay 44 números cuadrados perfectos del 1 al 2024, entonces

$$2024 - 44 = 1980$$

Por lo tanto, la cantidad de números que no son perfectos es: 1980

2. Sea $n = Nm$ tal que $m \in \mathbb{Z}$, donde N es el mayor divisor, por otro lado

$$n + N = 933 \quad \rightsquigarrow \quad Nm + N = 933 \quad \rightsquigarrow \quad N(m + 1) = 3 \times 311$$

entonces $N = 311$ y $m = 2$

Por lo tanto, n es: 622

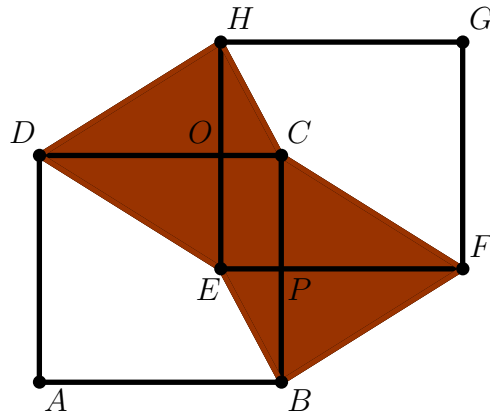
3. Se tiene que $n^2 = \frac{N}{3}$ debe ser entero, donde $N = kcm$, entonces

$$D^2 = n^2 + m$$

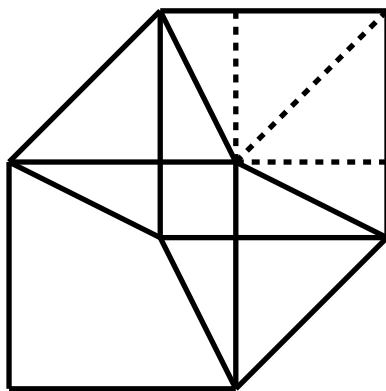
se sigue que los valores n es 1 , 2 y 3. y m es 3 , 12 y 27 respectivamente

Por lo tanto, se tiene los tres pares (m, n) : $(3, 1)$; $(12, 2)$; $(27, 3)$

4. Se tiene la figura



de donde acomodamos los triángulos DOH , DOF , EPB y PBF al cuadrado $EFGH$, que es idéntico al cuadrado $ABCD$



Por lo tanto el área del cuadrado $ABCD$ es: 1