

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN SIMÓN
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
15 DE JUNIO DE 2024

XXIII OLIMPIADA DE MATEMÁTICA "GAUSS" NIVEL 3

A.Paterno/A.Materno/Nombre(s):

Colegio/ N° telefónico domicilio:

Nota: Por favor escribe todos tus desarrollos y cálculos en una hoja blanca. Debes entregar tus hojas de desarrollo, en cada pregunta justifique sus respuestas.

1. ¿Cuál es la suma de todos los números de cuatro dígitos \overline{abcd} ?, con $a \neq 0$ tal que

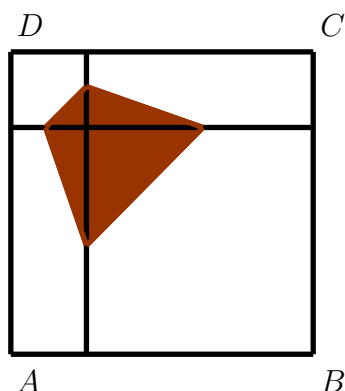
$$\overline{abcd} + a + b + c + d = 2024$$

2. Se tiene una sucesión de enteros positivos. El primer término de la sucesión es 1, el segundo término es 2, el tercero es 3 y, el cuadrado de cada número, iniciando por el segundo, es igual a la suma de sus términos vecinos. Por ejemplo, para el segundo número, tenemos que $2^2 = 1 + 3$. ¿Cuál es el residuo cuando el séptimo término se divide por 2024?

3. Reduce la siguiente fracción a su forma más simple

$$\frac{\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{\sqrt{2} + \sqrt{7 - 3\sqrt{5}}}$$

4. Se tiene el cuadrado $ABCD$, donde se tiene un cuadrado pequeño, uno grande y dos rectángulos idénticos, el cuadrilátero formado por los puntos medios (región sombreada) vale 6. Ver figura



Hallar el área del cuadrado $ABCD$

XXIII Olimpiada Matemática 2024 "GAUSS"

Nivel 3

Responsable Ing. Vidal Matias Marca

1. Se observa que \overline{abcd} debe ser menor que 2024, entonces $a=1$ o $a=2$

se tiene que $a=2$, entonces se tiene 2020, es decir

$$2020 = 2020 + 2 + 0 + 2 + 0 = 2024$$

para $a=1$, no se puede encontrar valores de b, c y d

Por lo tanto, la suma de todos los números es: 2024

2. Se tiene la sucesión

$$1 ; 2 ; 3 ; 7 ; 46 ; 2109 ; 4447835$$

de donde

$$\begin{array}{r|l} 4 & 4 & 4 & 7 & 8 & 3 & 5 \\ 3 & 9 & 9 & 8 & & & \\ 1 & 9 & 7 & 4 & 3 & & \\ & 1 & 5 & 2 & 7 & 5 & \\ & & 1 & 1 & 0 & 7 & \end{array}$$

Por lo tanto, el residuo es: 1107

3. Se tiene que

$$\sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{2}} = \frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

por otro lado, de manera análoga también se tiene

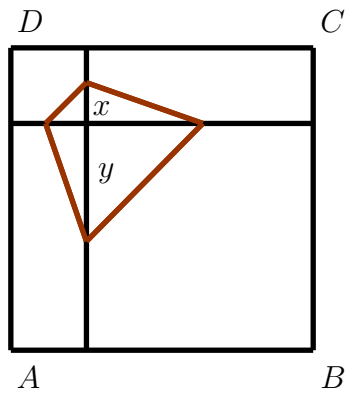
$$\sqrt{2} + \sqrt{7 - 3\sqrt{5}} = \frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

de donde

$$\frac{\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{\sqrt{2} + \sqrt{7 - 3\sqrt{5}}} = \frac{\frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}}}{\frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}}}$$

Por lo tanto, la expresión más simple es: $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

4. Se tiene la figura



de donde el lado del cuadrado grande es $2(x + y)$, entonces el área es $4(x + y)^2$

por otro lado se tiene el área de la región sombreada

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 2\left(\frac{xy}{2}\right) = 6 \quad \rightsquigarrow \quad (x + y)^2 = 12$$

Por lo tanto, el área del cuadrado $ABCD$ es: $A = 12 \times 4 = 48$