Universidad Mayor De San Simon

Facultad de Ciencias y Tecnología_▼ Departamento de Matemáticas ▼_Fecha: 27 de abril de 2013

1ra. OLIMPIADA DE MATEMÁTICA "PUNATA"

♣ ♠ ✠ **Nivel 6** ✠ ♠ ♣

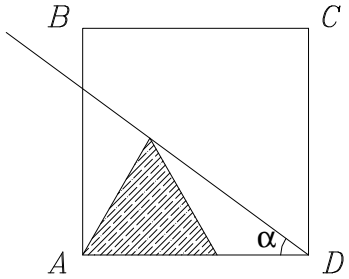
A.Paterno/A.Materno/Nombre(s) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Colegio/ Num. telefónico domicilio | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Recomendaciones: Llene sus datos usando letra imprenta en mayusculas, una letra en un cuadrado, dejando un espacio en blanco como separación. Lea cuidadosamente cada pregunta y justifique sus respuestas. Prohibido copiar

1. Un rectángulo de papel de 3 cm por 9 cm de dobla a lo largo de una recta, haciendo coincidir dos vértices opuestos. De este modo se forma un pentágono. Calcular su área.

2. En la siguiente figura $ABCD$ es un cuadrado de lado 1, dado el ángulo α, hallar una fórmula para el área del triángulo equilátero que se puede trazar como se indica en la figura



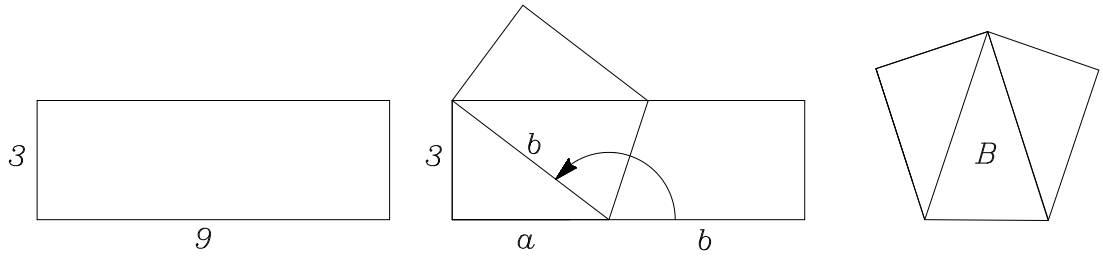
3. Los boletos de una rifa son enumerados desde el 2000 hasta el 9999. Un profesor compró todos los boletos en los que el 5 aparece exactamente 3 veces; luego de haber comprado estos boletos regaló a su alumno todos los boletos que contenían algún dígito 0. ¿Con cuántos boletos se quedó el profesor?

4. Se tienen dos progresiones aritméticas, la primera es 2,5,8,11,14,17,... y la segunda es 5,7,9,11,13,15,... como se puede observar ambas coinciden en el 5, el 11 y otros términos. Hallar el primer término mayor que 1000 en que coincidan ambas.

Solución de la 1ra. Olimpiada Matemática "PUNATA", nivel 6
Responsable: Alvaro H. Carrasco C.

1.Un rectángulo de papel de 3 cm por 9 cm de dobla a lo largo de una recta, haciendo coincidir dos vértices opuestos. De este modo se forma un pentágono. Calcular su área.

Solución:



entonces tenemos:

$$\begin{cases} b^2 = 3^2 + a^2 \\ a + b = 9 \end{cases}$$

de la segunda ecuación: $b = 9 - a$ y reemplazazando en la primera ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} (9-a)^2 &= 9 + a^2 \\ 81 - 18a + a^2 &= 9 + a^2 \end{aligned}$$

de donde:

$$a = 4$$

y entonces

$$b = 5$$

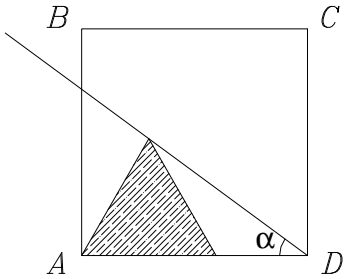
como el área rectángulo es igual al área dos triángulos rectángulos y uno isosceles, entonces:

$$3 \times 9 = 2 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 3 + 2B$$

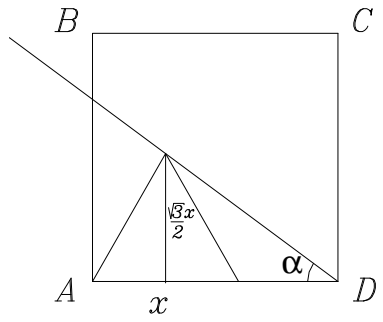
de donde $B = \frac{15}{2}$ de aquí el área del polígono es igual a

$$A = 2 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 3 + \frac{15}{2} = \frac{39}{2}$$

2. En la siguiente figura $ABCD$ es un cuadrado de lado 1, dado el ángulo α, hallar una fórmula para el área del triángulo equilátero que se puede trazar como se indica en la figura



Solución:



de esto tenemos

$$\tan(\alpha) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{1-\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{3}x}{2-x}$$

de donde

$$x = \frac{2\tan(\alpha)}{\sqrt{3}+\tan(\alpha)}$$

y como el área del triángulo es

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2\tan(\alpha)}{\sqrt{3}+\tan(\alpha)}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}\tan^2(\alpha)}{\left(\sqrt{3}+\tan(\alpha)\right)^2}$$

3. Los boletos de una rifa son enumerados desde el 2000 hasta el 9999. Un profesor compró todos los boletos en los que el 5 aparece exactamente 3 veces; luego de haber comprado estos boletos regaló a su alumno todos los boletos que contenían algún dígito 0. ¿Con cuántos boletos se quedó el profesor?

Solución:

Los boletos que compró el profesor son:

$$\begin{aligned}
&2555, 3555, 4555, 6555, 7555, 8555, 9555,\\
&5055, 5155, 5255, 5355, 5455, 5655, 5755, 5855, 5955,\\
&5505, 5515, 5525, 5535, 5545, 5565, 5575, 5585, 5595,\\
&5550, 5551, 5552, 5553, 5554, 5556, 5557, 5558, 5559
\end{aligned}$$

Luego de regalar los boletos con algún dígito 0 el profesor tiene: 31

4. Se tienen dos progresiones aritméticas, la primera es 2,5,8,11,14,17,... y la segunda es 5,7,9,11,13,15,... como se puede observar ambas coinciden en el 5, el 11 y otros términos. Hallar el primer término mayor que 1000 en que coincidan ambas.

Solución:

Las progresiones se pueden anotar:

$$\begin{aligned}
2+3d,\ \text{con } d &= 0,1,2,3,...\\
5+2c,\ \text{con } c &= 0,1,2,3,...
\end{aligned}$$

igualando cada término a 1000 tenemos $d = 333$ y $c = 498$ entonces las progresiones son:

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, ..., 1001, 1004, ...$$

$$5, 7, 9, 11, 13, 15, ..., 1001, 1003, ...$$

luego el primer término mayor de 1000 en que coincidan ambas es 1001.