Universidad Mayor De San Simon

Facultad de Ciencias y Tecnología_▼ Departamento de Matemáticas ▼_Fecha: 16 de junio de 2018

XVII olimpiada de matemática "GAUSS" Nivel 3

A.Paterno/A.Materno/Nombre(s)

Colegio/ Num. telefónico domicilio

Recomendaciones: Llene sus datos usando letra imprenta en mayusculas, dejando un espacio en blanco como separación. Lea cuidadosamente cada pregunta y justifique sus respuestas. Prohibido copiar

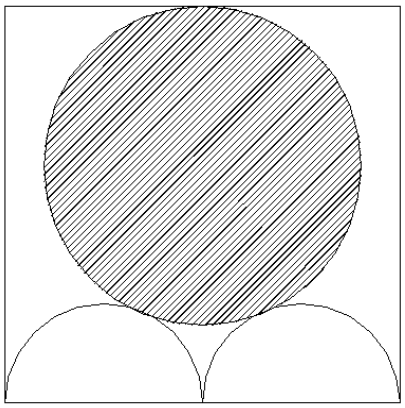
1. Hallar la suma de los digitos del número $\left(\underbrace{333...334}_{n \text{ cifras}}\right)^2$

2. Hallar la suma de los números en la fila 40 en el siguiente triángulo numérico:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 3 & & 5 & & & \\ & & 7 & & 9 & & 11 & & \\ & 13 & & 15 & & 17 & & 19 & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

3. Determinar el menor número entero positivo que tiene todos sus dígitos iguales a 4 y sea múltiplo de 169.

4. En la figura se tiene un cuadrado, una circunferencia y dos medias circunferencias tangentes entre si, como en la figura, sabiendo que el cuadrado tiene lado 25 hallar el área de la circunferencia.



Soluciones XVII Olimpiada Matemática GAUSS - 2018, nivel 3
Responsable Mgr. Alvaro Carrasco C.

1. Estudiamos los productos:

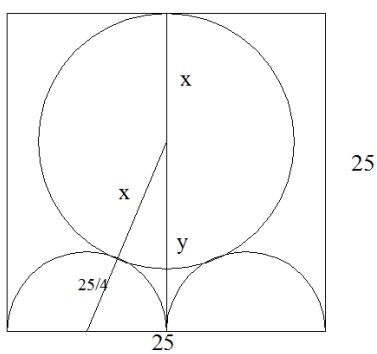
$$\begin{aligned} 34^2 &= 1156 \\ 334^2 &= 111556 \\ 3334^2 &= 11115556 \\ &\vdots \\ \underbrace{333...334}_{n \text{ cifras}}{}^2 &= \underbrace{111\cdots1}_{n \text{ cifras}}\underbrace{555\cdots5}_{n-1 \text{ cifras}}6 \end{aligned}$$

luego la suma de los digitos del número $\underbrace{333...334}_{n \text{ cifras}}{}^2$ es igual a $n + 5\,(n-1) + 6 = 6n + 1$

2. Las sumas por fila son cubos, es decir:

$$\begin{aligned} &\text{1ra, fila: } 1 \\ &\text{2da, fila: } \quad 3 + 5 = 8 = 2^3 \\ &\text{3ra, fila } : \quad 7 + 9 + 11 = 27 = 3^3 \\ &\text{4ta, fila } : \quad 13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3 \\ &\qquad\qquad \vdots \\ &\text{30ma, fila } : \quad 40^3 = 64000 \end{aligned}$$

3. El número buscado es 44444444.
4. Consideremos el gráfico



en el triángulo rectangulo $y^2 = \left(x + \frac{25}{4}\right)^2 - \left(\frac{25}{4}\right)^2 = x^2 + \frac{25}{2}x$, y entonces

$$x + \sqrt{x^2 + \frac{25}{2}x} = 25$$

resolviendo se tiene: $x = 10$ y el área buscada es 100π.