

IX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA EULER

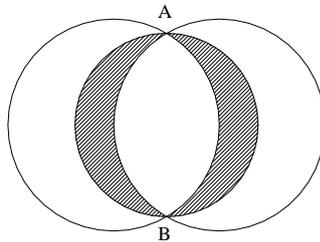
4^{to} de Secundaria

A.Paterno/A.Materno/Nombre(s)

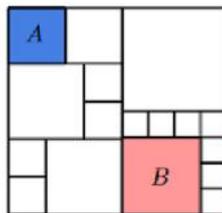
Colegio/ Tu número telefónico

Recomendaciones: Llene sus datos usando letra imprenta en mayúsculas, dejando un espacio en blanco como separación. Lea cuidadosamente cada pregunta y justifique sus respuestas. Prohibido copiar

1. En la figura se tienen dos círculos del mismo radio. Cada círculo pasa por el centro del otro círculo. Sea A y B los puntos de intersección de estas circunferencias. El segmento AB es diámetro de una tercer circunferencia. Halle el área sombreada.



2. Se tiene un rectángulo el cual está hecho con cuadrados. Encuentre el cociente del lado del cuadrado A y del lado del cuadrado B .



3. Halle las dos soluciones de la ecuación:

$$4^x + 6^{x^2} = 5^x + 5^{x^2}$$

4. Yo camino a 4 km por hora y corro a 6 km por hora. Me dí cuenta que ahorro 3 minutos y 45 segundos corriendo en lugar de caminar para llegar a la escuela. ¿A que distancia vivo de la escuela?

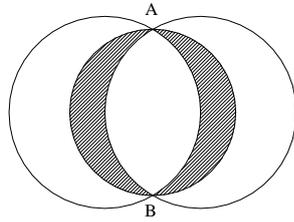
5. Hallar la suma de las raíces de la ecuación:

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 3} + \frac{1}{x^2 - 2x - 1} = \frac{2}{x^2 - 2x}$$



Soluciones IX Olimpiada Nacional de Matemática EULER 2016, nivel 4
 Responsable Mgr. Alvaro Carrasco C.

1. En la figura se tienen dos círculos del mismo radio. Cada círculo pasa por el centro del otro círculo. Sea A y B los puntos de intersección de estas circunferencias. El segmento AB es diámetro de una tercer circunferencia. Halle el área sombreada.



Solución:

De gráfico tenemos que el triángulo tiene área $A = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$, donde r es el radio de las circunferencias. Por otro lado el área B es igual a:

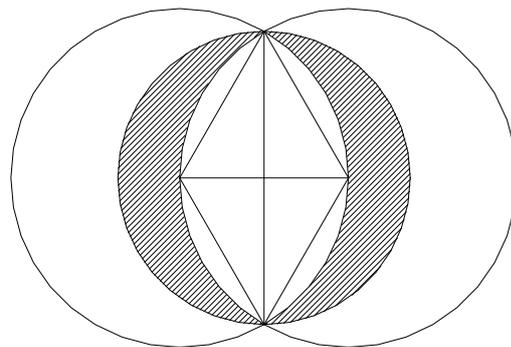
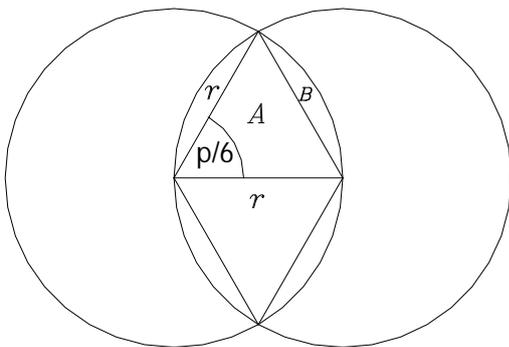
$$B = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$$

de donde el área de la intersección de las circunferencias es igual a:

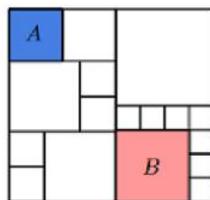
$$2\frac{\sqrt{3}}{4}r^2 + 4\left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2\right) = \frac{2}{3}\pi r^2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}r^2$$

por otro lado es fácil ver que el radio de la tercera circunferencia es la altura del triángulo de área A , es decir: $R = \frac{\sqrt{3}}{2}r$, de donde el área buscada es igual a

$$\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\pi r^2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}r^2\right) = \frac{r^2}{12}(\pi + 6\sqrt{3})$$



2. Se tiene un rectángulo el cual esta hecho con cuadrados. encuentre el cociente del lado del cuadrado A y del lado del cuadrado B .



Solución:

Sea x el lado del cuadrado más pequeño, entonces el lado del cuadrado B es $3x$, el cuadrado mediano tiene lado y tal que $2y = 3x$ de donde $y = \frac{3x}{2}$ y sea z el lado del cuadrado A entonces $2z = 3x + \frac{3x}{2}$ y así $z = \frac{9}{4}x$, de donde el cociente entre el lado del cuadrado A y del lado del cuadrado B es

$$\frac{\frac{9}{4}x}{3x} = \frac{3}{4}$$

3. Halle las dos soluciones de la ecuación:

$$4^x + 6^{x^2} = 5^x + 5^{x^2}$$

Solución:

Las soluciones son 0 y 1.

4. Yo camino a 4 km por hora y corro a 6 km por hora. Me dí cuenta que ahorro 3 minutos y 45 segundos corriendo en lugar de caminar para llegar a la escuela. ¿A que distancia vivo de la escuela?

Solución:

Sea x la distancia de casa a la escuela, sean a el tiempo cuando camino y sea b el tiempo cuando corro, entonces $a - b = 3 + \frac{45}{60} = \frac{15}{4}$ minutos, que son equivalentes a $\frac{1}{16}$ horas, como $x = 4a$ y $x = 6b$ tenemos:

$$\frac{x}{4} - \frac{x}{6} = \frac{1}{16}$$

de donde $x = \frac{3}{4}$ kilometros.

5. Hallar la suma de las raíces de la ecuación:

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 3} + \frac{1}{x^2 - 2x - 1} = \frac{2}{x^2 - 2x}$$

Solución:

Las soluciones son: 3 y -1

