

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN SIMON

Facultad de Ciencias y Tecnología ▼ Departamento de Matemáticas ▼ Fecha: 20-10-2018

XXXIII OLIMPIADA DEPARTAMENTAL DE MATEMÁTICA 2018 XI OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA EULER

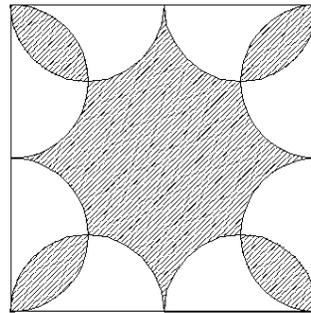
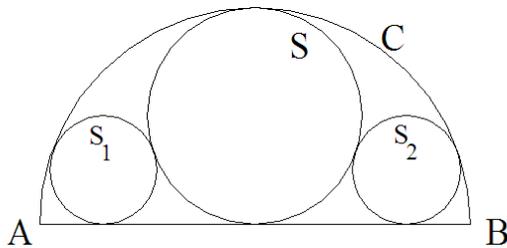
4^{to} de Secundaria

A.Paterno/A.Materno/Nombre(s)

Colegio/ Tu número telefónico

Recomendaciones: Llene sus datos usando letra imprenta en mayúsculas, dejando un espacio en blanco como separación. Lea cuidadosamente cada pregunta y justifique sus respuestas. Prohibido copiar

1. Un niño escribió en su cuaderno todos los números naturales desde el 1 al 180, de la siguiente forma: 1, 2, 3, 4, ..., 180. Luego, borró cada número múltiplo de 3 y en su lugar escribió la tercera parte de dicho número. Al final de este proceso, en el cuaderno del niño hay 180 números, pero algunos están repetidos. ¿Cuántos números diferentes hay en el cuaderno del niño?
2. En la figura C es una circunferencia de diámetro AB . Cada una de las circunferencias S , S_1 y S_2 es tangente a C y al diámetro AB . Además, la circunferencia S es tangente a AB en su punto medio y es tangente, a las otras dos circunferencias. Si cada uno de los radios de S_1 y S_2 miden 2, halle la longitud del radio de S .



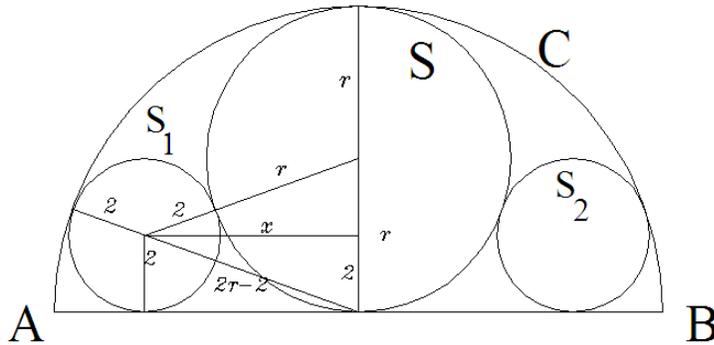
3. En un cuadrado de lado 8 se dibujan 8 semicírculos de radio 2, halle el área sombreada.
4. En cierto país existen solamente billetes de 20, 50, 100 y 500 pesos. Pedro tiene 1000 pesos en billetes de cada uno de los cuatro tipos (al menos uno de cada tipo). Si tiene más billetes de 50 pesos que billetes de 20 pesos, ¿cuántos billetes tiene Pedro en el total?



Soluciones XXXIII Olimpiada Departamental de Matemática 2018
 XI Olimpiada Nacional de Matemática "Euler" 2018, nivel 4
 Responsable Mgr. Alvaro Carrasco C.

1. Entre los números de 1 a 180, hay $\frac{180}{3} = 60$ múltiplos de 3, los $180 - 60 = 120$ números que quedan, no son múltiplos de 3. Por otro lado entre (los múltiplos de 3) 60 hay dos clases de números los que son múltiplos de 3 (hay $\frac{60}{3} = 20$) y los que no lo son (hay $60 - 20 = 40$). Los que no son múltiplos (40 dígitos) ya se contarón entre los anteriores 120 números y no los contaremos otra vez. Los múltiplos de tres (20 números) si se cuentan y así hay $120 + 20 = 140$ números diferentes.

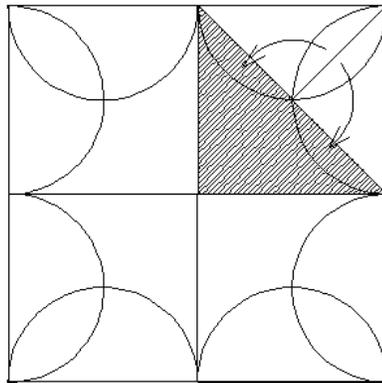
2. De la figura se tiene



$$(2r - 2)^2 - 2^2 = (r + 2)^2 - (r - 2)^2$$

resolviendo tenemos $r = 4$

3. Dividiendo el cuadrado en cuatro cuadros y en uno de ellos tenemos



de donde se sigue que el área sombreada tiene área $\frac{1}{2}4^2 = 8$, así el área total es igual a $8 \times 4 = 32$

4. Sean x, y, z la cantidad de billetes de 20, 50 y 100 pesos respectivamente, es claro que tiene un billete de 500 pesos, entonces

$$20x + 50y + 100z + 500 = 1000$$

simplificando

$$2x + 5y + 10z = 50$$

y la única solución con $y > x$ es $x = 5, y = 6, z = 1$, de donde la cantidad total de billetes es $5 + 6 + 1 + 1 = 13$.

