Universidad Mayor De San Simon

Facultad de Ciencias y Tecnología▼ Departamento de Matemáticas ▼Fecha: 12-11-2016

IX olimpiada nacional de matemática EULER

5$^{\text{to}}$ de Secundaria

A.Paterno/A.Materno/Nombre(s)

Colegio/ Tu número telefónico

Recomendaciones: Llene sus datos usando letra imprenta en mayusculas, dejando un espacio en blanco como separación. <u>Lea cuidadosamente</u> cada pregunta y justifique sus respuestas. Prohibido copiar

1. En el cuadrado $ABCD$, ver figura 1, AX tiene longitud 1, XY tiene longitud 2 y YC tiene longitud 3. Además $\angle AXY = 90^0$ y $\angle XYC = 90^0$. Determine el área del cuadrado.

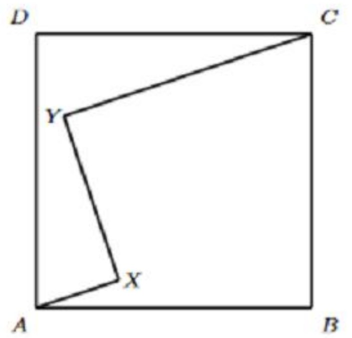


Figura1

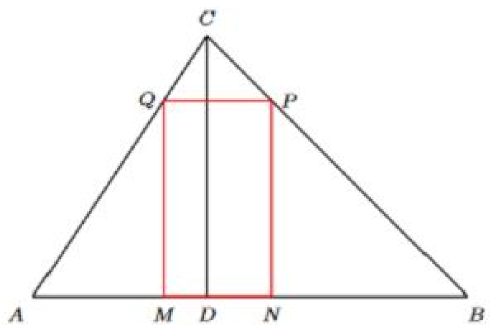


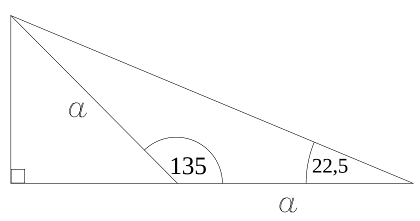
Figura 2

2. Resuelva la siguiente ecuación

$$\frac{3}{2} + \log_3\left(x^{1/4}\right) = \log_x(9x)$$

3. En la figura2, $AB = 12$ y $CD = 6$, y el área del rectángulo $MNPQ$ es 10. Halle la longitud de los lados del rectángulo $MNPQ$

4. Usando los triángulos de la figura hallar $\sin(22.5^0)$ y $\cos(22.5^0)$



5. ¿Cuántos números entre 1 y 10^{2016} tienen suma de sus dígitos igual a 2?

Soluciones IX Olimpiada Nacional de Matemática EULER 2016, nivel 5
Responsable Mgr. Alvaro Carrasco C.

1. En el cuadrado $ABCD$, ver figura 1, AX tiene longitud 1, XY tiene longitud 2 y YC tiene longitud 3. Además $\angle AXY = 90^0$ y $\angle XYC = 90^0$. Determine el área del cuadrado.

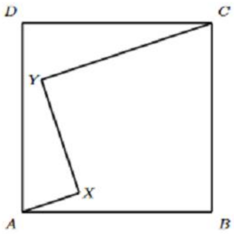


Figura1

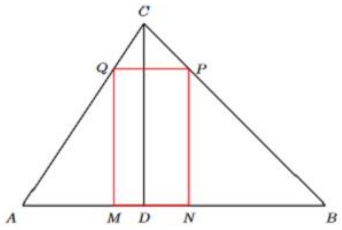
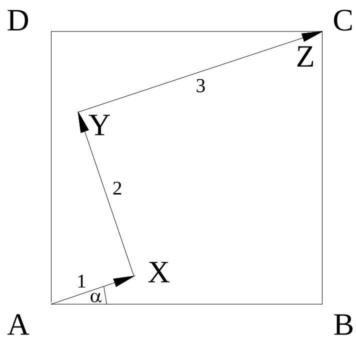
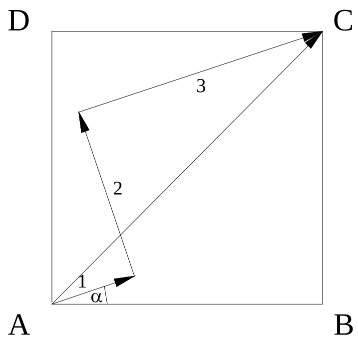


Figura 2

Solución:
Consideremos la figura:





Sea el vector $\overrightarrow{X} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, entonces $\overrightarrow{Y} = 2(-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$ y entonces $\overrightarrow{Z} = 3(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ entonces $\overrightarrow{X} + \overrightarrow{Y} + \overrightarrow{Z} = (4\cos(\alpha) - 2\sin(\alpha), 2\cos(\alpha) + 4\sin(\alpha)) =$ a la diagonal del cuadrado
Si d es la diagonal del cuadrado, entonces el área del cuadrado es:

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{(4\cos(\alpha) - 2\sin(\alpha))^2 + (2\cos(\alpha) + 4\sin(\alpha))^2} = \frac{1}{2}(20) = 10$$

2. Resuelva la siguiente ecuación

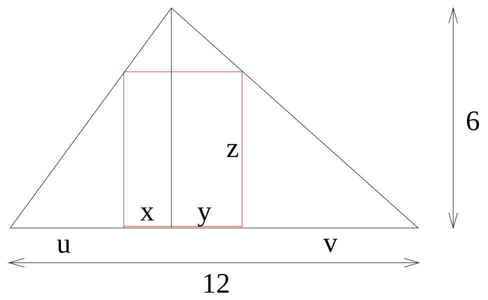
$$\frac{3}{2} + \log_3\left(x^{1/4}\right) = \log_x(9x)$$

Solución:
Resolviendo se tiene $x = 9$ y $x = \frac{1}{81}$.

3. En la figura2, $AB = 12$ y $CD = 6$, y el área del rectángulo $MNPQ$ es 10. Halle la longitud de los lados del rectángulo $MNPQ$

Solución:

De la figura:



se tienen las relaciones:

$$\begin{cases} u + x + y + v = 12 & (1) \\ (x+y)\,z = 10 & (2) \\ \dfrac{x}{6-z} = \dfrac{u+x}{6} = \dfrac{u}{z} & (3) \\ \dfrac{y}{6-z} = \dfrac{y+v}{6} = \dfrac{v}{z} & (4) \end{cases}$$

Sumando (3) y (4) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{6-z} &= \frac{u+v}{z} \\ \frac{(x+y)\,z}{6-z} &= u+v \\ \frac{10}{6-z} &= u+v \qquad (5) \end{aligned}$$

Por otro lado sumando (3) y (4) tenemos:

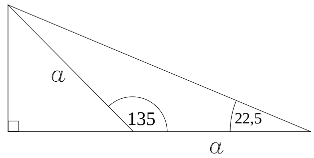
$$\begin{aligned} \frac{u+x+y+v}{6} &= \frac{u+v}{z} \\ \frac{12}{6} &= \frac{u+v}{z} \\ u+v &= 2z \qquad (6) \end{aligned}$$

de (5) y (6) tenemos

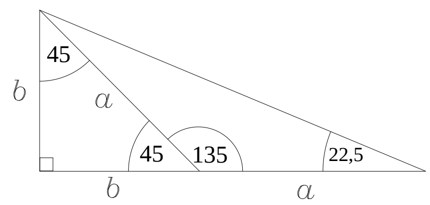
$$\frac{10}{6-z} = 2z$$

resolviendo tenemos $z_1 = 1$ y $z_2 = 5$ en (2) se tiene $x + y = 10$ y $x + y = 2$. Y las dimensiones de $MNPQ$ son $10{\times}1$ y $2{\times}5$.

4. Usando los triángulos de la figura hallar $\sin\left(22.5^0\right)$ y $\cos\left(22.5^0\right)$



Solución:
Del gráfico se tiene:



donde $a^2 = 2b^2$ de donde $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $h^2 = b^2 + (a+b)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(a + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2\left(\sqrt{2}+2\right)$
de donde

$$\sin\left(22.5^0\right) = \frac{b}{h} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{a\sqrt{\sqrt{2}+2}} = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}$$

$$\cos\left(22.5^0\right) = \frac{a+b}{h} = \frac{a+\frac{a}{\sqrt{2}}}{a\sqrt{\sqrt{2}+2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}$$

5. ¿Cuántos números entre 1 y 10^{2016} tienen suma de sus dígitos igual a 2?
Solución:
Caso 1: Los números son:

Con dos dígitos: 11

Con tres dígitos: $110, 101$

Con cuatro dígitos: $1100, 1010, 1001$

Con cinco dígitos: $11000, 10100, 10010, 10001$

Con seis dígitos: $110000, 101000, 100100, 100010, 100001$

$$\vdots$$

entonces el número de numeros menores de 10^{2016} formado por dos unos y ceros es igual a:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 2015 = \frac{2015 \times 2016}{2} = 2031120$$

Caso2: Los números son de la forma:

$$2, 20, 200, 2000, \cdots, 2 \times 10^{2015}$$

entonces en este caso hay 2016 números. Entonces en total hay

$$2031120 + 2016 = 2033136$$