UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN SIMON

Facultad de Ciencias y Tecnología▼ Departamento de Matemáticas ▼Fecha: 12-11-2016

IX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA EULER

6$^{\text{to}}$ de Secundaria

A.Paterno/A.Materno/Nombre(s)

Colegio/ Tu número telefónico

Recomendaciones: Llene sus datos usando letra imprenta en mayusculas, dejando un espacio en blanco como separación. Lea cuidadosamente cada pregunta y justifique sus respuestas. Prohibido copiar

1. Varios cuadrados de lado 1 se colocan en linea como en la figura 1. Sea O el vértice inferior izquierdo del primer cuadrado, y sean P y Q los vértices superiores derechos de los cuadrados 2015 y 2016 respectivamente. La rectas OP y OQ intersectan al primer cuadrado en X e Y respectivamente. Determine el área del triángulo OXY.

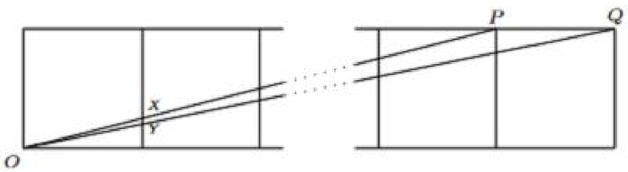


Figura 1

2. Se construyen todos los números de siete dígitos usando los dígitos 1,2,3,4,5,6 y 7 donde cada dígito siempre se usa y solo una ves. Se escriben estos números en orden creciente y se divide este conjunto por la mitad en dos conjuntos con el mismo número de elementos. ¿Cuál es el último número de la primera mitad?

3. En la figura2, ABC es un triángulo equilátero de área 1. Además B es el punto medio de AX, C es el punto medio de BY y A es el punto medio de ZC. Hallar el área del triángulo XYZ

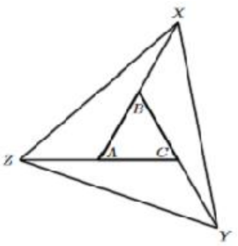


Figura 2

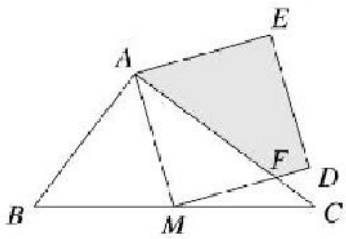


Figura 3

4. Sea ABC un triángulo tal que $AB = 6$, $AC = 8$ y $BC = 10$ y M es el punto medio de BC, .ver figura 3, $AMDE$ es un cuadrado y MD intersecta a AC en F. Encontrar el área del cuadrilátero $AFDE$

5. ¿Cuántos números entre 1 y 10^{2016} tienen suma de sus dígitos igual a 2?

Soluciones IX Olimpiada Nacional de Matemática EULER 2016, nivel 6
Responsable Mgr. Alvaro Carrasco C.

1. Varios cuadrados de lado 1 se colocan en linea como en la figura 1. Sea O el vértice inferior izquierdo del primer cuadrado, y sean P y Q los vértices superiores derechos de los cuadrados 2015 y 2016 respectivamente. La rectas OP y OQ intersectan al primer cuadrado en X e Y respectivamente. Determine el área del triángulo OXY.

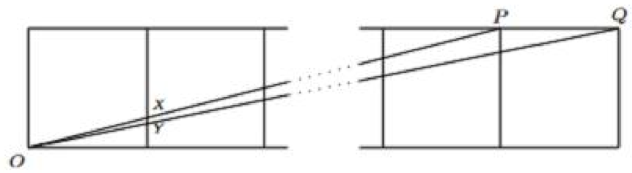
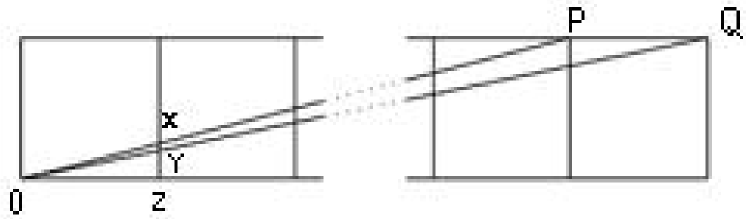


Figura 1

Solución:
De la figura se tiene



$$\frac{XZ}{1} = \frac{1}{2015} \text{ y } \frac{YZ}{1} = \frac{1}{2016}$$

por otro lado:

$$\text{área}\,(OXY) = \text{área}\,(OXZ) - \text{área}\,(OYZ) = \frac{1}{2}XZ - \frac{1}{2}YZ = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2015} - \frac{1}{2016}\right) = \frac{1}{8124\,480}$$

2. Se construyen todos los números de siete dígitos usando los dígitos 1,2,3,4,5,6 y 7 donde cada dígito siempre se usa y solo una ves. Se escriben estos números en orden creciente y se divide este conjunto por la mitad en dos conjuntos con el mismo número de elementos. ¿Cuál es el último número de la primera mitad?
Solución:
Existen $7! = 5040$ números los cuales se organizan como sigue:

$$\boxed{\underbrace{1\ldots}_{720}\underbrace{2\ldots}_{720}\underbrace{3\ldots}_{720}}\ \underbrace{4\ldots}_{720}\ \boxed{\underbrace{5\ldots}_{720}\underbrace{6\ldots}_{720}\underbrace{7\ldots}_{720}}$$

ellos que empiezan con 4 se organizan en seis grupos cada una con 120 números, como sigue:

$$\boxed{\underbrace{41\ldots}_{120}\underbrace{42\ldots}_{120}\underbrace{43\ldots}_{120}}\boxed{\underbrace{45\ldots}_{120}\underbrace{46\ldots}_{120}\underbrace{47\ldots}_{120}}$$

entonces el último número de la primera mitad es 4376521

3. En la figura2, ABC es un triángulo equilátero de área 1. Además B es el punto medio de AX, C es el punto medio de BY y A es el punto medio de ZC. Hallar el área del triángulo XYZ

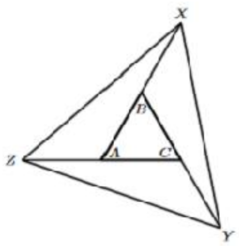


Figura 2

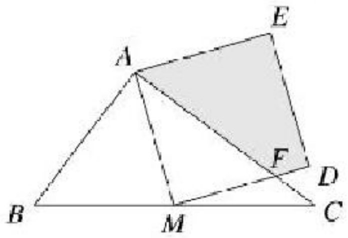
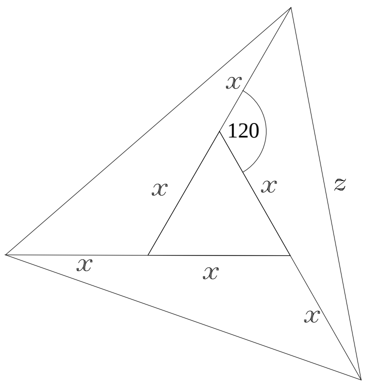


Figura 3

Solución:

Del gráfico se sigue:



$$1 = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

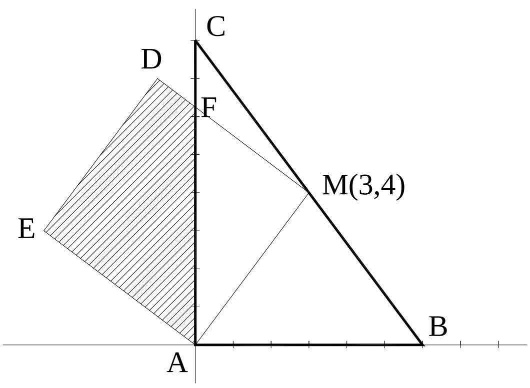
$$z^2 = x^2 + 4x^2 - 4x^2 \cos(120) = 7x^2$$

entonces el área buscada es $\frac{\sqrt{3}}{4}z^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}7x^2 = \frac{7\sqrt{3}}{4}\frac{4}{\sqrt{3}} = 7$

4. Sea ABC un triángulo tal que $AB = 6$, $AC = 8$ y $BC = 10$ y M es el punto medio de BC, .ver figura 3, $AMDE$ es un cuadrado y MD intersecta a AC en F. Encontrar el área del cuadrilátero $AFDE$

Solución:

Del gráfico tenemos



La recta que pasa por los puntos DM es $y - 4 = -\frac{3}{4}(x-3)$ y las coordenadas de F son $\left(0, \frac{25}{4}\right)$. De donde el área del triángulo FMA es igual a:

$$\frac{1}{2}\overline{AM} \times \overline{MF} = \frac{1}{2}(5)\left(\frac{15}{4}\right) = \frac{75}{8}$$

Por tanto el área buscada es: $25 - \dfrac{75}{8} = \dfrac{125}{8}$

5. ¿Cuántos números entre 1 y 10^{2016} tienen suma de sus dígitos igual a 2?

Solución:

Caso 1: Los números son:

$$\text{Con dos dígitos: } 11$$

$$\text{Con tres dígitos: } 110, 101$$

$$\text{Con cuatro dígitos: } 1100, 1010, 1001$$

$$\text{Con cinco dígitos: } 11000, 10100, 10010, 10001$$

$$\text{Con seis dígitos: } 110000, 101000, 100100, 100010, 100001$$

$$\vdots$$

entonces el número de numeros menores de 10^{2016} formado por dos unos y ceros es igual a:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 2015 = \frac{2015 \times 2016}{2} = 2031120$$

Caso2: Los números son de la forma:

$$2, 20, 200, 2000, \cdots, 2 \times 10^{2015}$$

entonces en este caso hay 2016 números. Entonces en total hay

$$2031120 + 2016 = 2033136$$