

IX OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA EULER

5^{to} de Secundaria

A.Paterno/A.Materno/Nombre(s)

[illegible]

Colegio/ Tu número telefónico

[illegible]

Recomendaciones: Llene sus datos usando letra imprenta en mayúsculas, dejando un espacio en blanco como separación. Lea cuidadosamente cada pregunta y justifique sus respuestas. Prohibido copiar

1. En el cuadrado $ABCD$, ver figura 1, AX tiene longitud 1, XY tiene longitud 2 y YC tiene longitud 3. Además $\angle AXY = 90^\circ$ y $\angle XYC = 90^\circ$. Determine el área del cuadrado.

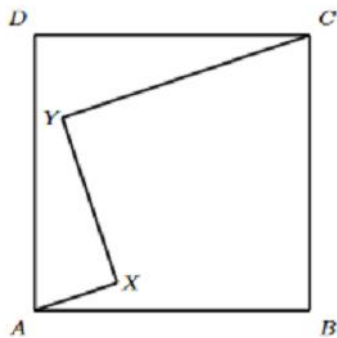


Figura 1

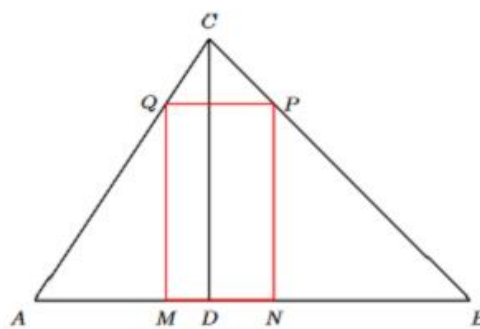
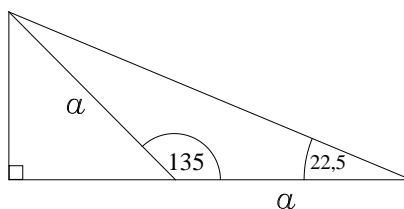


Figura 2

2. Resuelva la siguiente ecuación

$$\frac{3}{2} + \log_3(x^{1/4}) = \log_x(9x)$$

3. En la figura 2, $AB = 12$ y $CD = 6$, y el área del rectángulo $MNPQ$ es 10. Halle la longitud de los lados del rectángulo $MNPQ$
4. Usando los triángulos de la figura hallar $\sin(22.5^\circ)$ y $\cos(22.5^\circ)$



5. ¿Cuántos números entre 1 y 10^{2016} tienen suma de sus dígitos igual a 2?



Soluciones IX Olimpiada Nacional de Matemática EULER 2016, nivel 5
Responsable Mgr. Alvaro Carrasco C.

1. En el cuadrado $ABCD$, ver figura 1, AX tiene longitud 1, XY tiene longitud 2 y YC tiene longitud 3. Además $\angle AXY = 90^\circ$ y $\angle XYC = 90^\circ$. Determine el área del cuadrado.

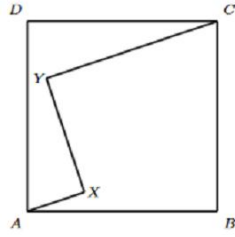


Figura 1

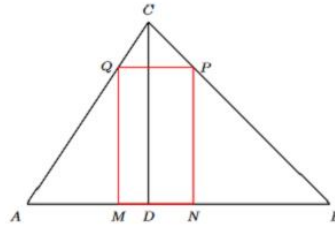
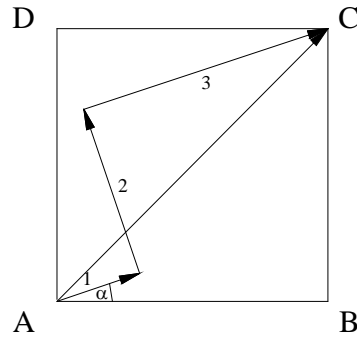
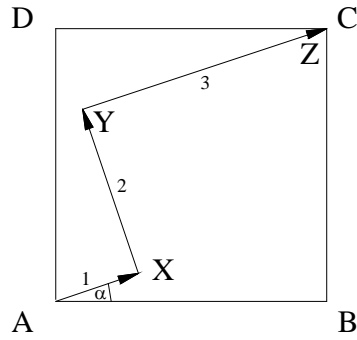


Figura 2

Solución:

Consideremos la figura:



Sea el vector $\vec{X} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, entonces $\vec{Y} = 2(-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$ y entonces $\vec{Z} = 3(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ entonces $\vec{X} + \vec{Y} + \vec{Z} = (4\cos(\alpha) - 2\sin(\alpha), 2\cos(\alpha) + 4\sin(\alpha)) =$ a la diagonal del cuadrado

Si x es el lado del cuadrado, entonces

$$x = \sqrt{(4\cos(\alpha) - 2\sin(\alpha))^2 + (2\cos(\alpha) + 4\sin(\alpha))^2}$$

simplificando tenemos

$$x = \sqrt{20}$$

de donde el área del cuadrado es $A = 20$.

2. Resuelva la siguiente ecuación

$$\frac{3}{2} + \log_3(x^{1/4}) = \log_x(9x)$$

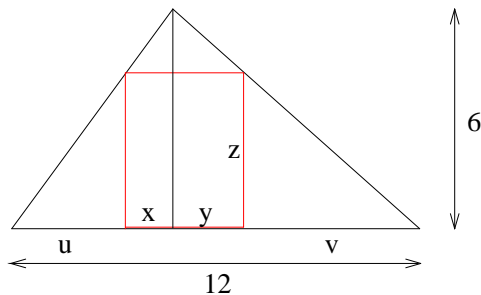
Solución:

Resolviendo se tiene $x = 9$ y $x = \frac{1}{81}$.

3. En la figura 2, $AB = 12$ y $CD = 6$, y el área del rectángulo $MNPQ$ es 10. Halle la longitud de los lados del rectángulo $MNPQ$

Solución:

De la figura:



se tienen las relaciones:

$$\begin{cases} u + x + y + v = 12 & (1) \\ (x + y)z = 10 & (2) \\ \frac{x}{6 - z} = \frac{u + x}{6} = \frac{u}{z} & (3) \\ \frac{y}{6 - z} = \frac{y + v}{6} = \frac{v}{z} & (4) \end{cases}$$

Sumando (3) y (4) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{x + y}{6 - z} &= \frac{u + v}{z} \\ \frac{(x + y)z}{6 - z} &= u + v \\ \frac{10}{6 - z} &= u + v \end{aligned} \quad (5)$$

Por otro lado sumando (3) y (4) tenemos:

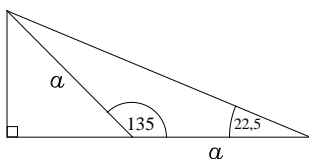
$$\begin{aligned} \frac{u + x + y + v}{6} &= \frac{u + v}{z} \\ \frac{12}{6} &= \frac{u + v}{z} \\ u + v &= 2z \end{aligned} \quad (6)$$

de (5) y (6) tenemos

$$\frac{10}{6 - z} = 2z$$

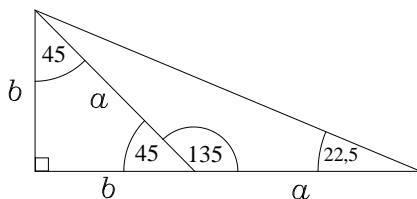
resolviendo tenemos $z_1 = 1$ y $z_2 = 5$ en (2) se tiene $x + y = 10$ y $x + y = 2$. Y las dimensiones de $MNPQ$ son 10×1 y 2×5 .

4. Usando los triángulos de la figura hallar $\sin(22.5^\circ)$ y $\cos(22.5^\circ)$



Solución:

Del gráfico se tiene:



donde $a^2 = 2b^2$ de donde $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $h^2 = b^2 + (a + b)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(a + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2(\sqrt{2} + 2)$
de donde

$$\sin(22.5^\circ) = \frac{b}{h} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{a\sqrt{\sqrt{2} + 2}} = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2} + 4}}$$

$$\cos(22.5^\circ) = \frac{a + b}{h} = \frac{a + \frac{a}{\sqrt{2}}}{a\sqrt{\sqrt{2} + 2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2\sqrt{2} + 4}}$$

5. ¿Cuántos números entre 1 y 10^{2016} tienen suma de sus dígitos igual a 2?

Solución:

Caso 1: Los números son:

Con dos dígitos: 11

Con tres dígitos: 110, 101

Con cuatro dígitos: 1100, 1010, 1001

Con cinco dígitos: 11000, 10100, 10010, 10001

Con seis dígitos: 110000, 101000, 100100, 100010, 100001

⋮

entonces el número de números menores de 10^{2016} formado por dos unos y ceros es igual a:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 2015 = \frac{2015 \times 2016}{2} = 2031120$$

Caso2: Los números son de la forma:

$$2, 20, 200, 2000, \dots, 2 \times 10^{2015}$$

entonces en este caso hay 2016 números. Entonces en total hay

$$2031120 + 2016 = 2033136$$

