

Facultad de Ciencias y Tecnología ▼ Departamento de Matemáticas ▼ Fecha: 27 de agosto de 2016

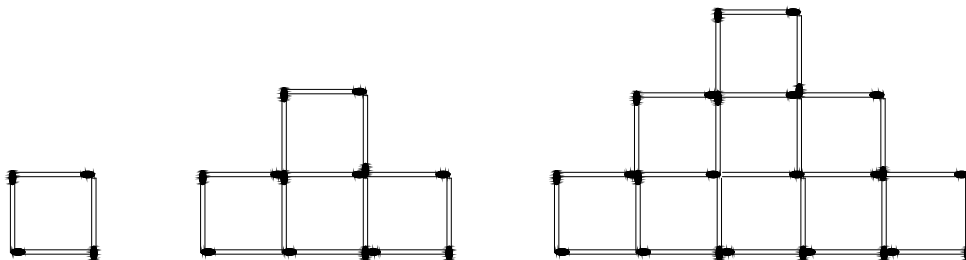
XV OLIMPIADA DE MATEMÁTICA “GAUSS”

2^{do} de secundaria

[illegible][illegible]

Recomendaciones: Llene sus datos usando letra imprenta en mayúsculas, dejando un espacio en blanco como separación. Lea cuidadosamente cada pregunta y justifique sus respuestas. Pregunta sin desarrollo será anulada Prohibido copiar

1. Se tiene el número $N = 20162016201620162016x$, hallar el valor del dígito x para que N sea divisible por 11.
2. Los números del 1 al 99 se escriben uno al lado del otro (1234 ... 979899). Antonio empieza por el uno de la izquierda y Beatriz por el 9 de la derecha, si Antonio pinta dos números por cada uno de Beatriz y así hasta encontrarse. ¿Cuándo se encuentran que números pinta Antonio y que número pinta Beatriz?
3. Una calculadora tiene rota parte de la pantalla y muestra $\otimes 38 \otimes 1625$ como resultado de una multiplicación. Sabiendo que este resultado es divisible por 9 y 11. ¿Cuales son los dígitos que no se ven en la pantalla rota?
4. Palitos de fosforo se usan para construir las siguientes figuras



Por ejemplo se usarón 4 palitos para construir la primera figura, 13 para la segunda figura, 26 para la tercera figura. Si se tienen 2016 palitos y se construye la mayor figura posible, diga que cuántos palitos de sobran.



Soluciones XIII Olimpiada Matemática GAUSS - 2014, nivel 2
Responsable Mgr. Alvaro Carrasco C.

1. Se tiene el número $N = 20162016201620162016x$, hallar el valor del dígito x para que N sea divisible por 11.

Solución:

La suma de las cifras de posición par menos la suma de las cifras de posición impar es igual

$$36 - (18 + x) = 11a, \quad a \in \mathbb{Z}$$

de donde $x = 7$ ♣

2. Los números del 1 al 99 se escriben uno al lado del otro (1234 ... 979899). Antonio empieza por el uno de la izquierda y Beatriz por el 9 de la derecha, si Antonio pinta dos números por cada uno de Beatriz y así hasta encontrarse. ¿Cuándo se encuentran que números pinta Antonio y que número pinta Beatriz?

Solución:

El número de dígitos desde 1 al 99 es $9 + (99 - 10 + 1) \times 2 = 189$ dividiendo entre 3 tenemos que Beatriz pinta 63 dígitos y Antonio el doble es decir 126. Contemos los 63 dígitos de Beatriz:

$$(99 - x + 1) \times 2 = 63$$

resolviendo tenemos $x \simeq 68$. Veamos cuantos dígitos hay hasta el 68:

$$99989796, \dots, 68$$

hay $(99 - 68 + 1) \times 2 = 64$ lo cual indica que contamos un dígito demás, entonces la situación es la siguiente

$$1234, \dots, 65666 \underbrace{76}_{\text{Antonio}}, \underbrace{8}_{\text{Beatriz}} 697071, \dots, 99 \quad \clubsuit$$

3. Una calculadora tiene rota parte de la pantalla y muestra $\textcircled{*}38 \textcircled{*} 1625$ como resultado de una multiplicación. Sabiendo que este resultado es divisible por 9 y 11. ¿Cuales son los dígitos que no se ven en la pantalla rota?

Solución:

Sea el número $x38y1625$ como es divisible por 11 y 9 se tiene:

$$\begin{cases} 11 + x - (14 + y) = 11 \\ 25 + x + y = 9 \end{cases} \quad \text{es decir} \quad \begin{cases} x - y - 3 = 11 \\ x + y = 9 - 25 \end{cases}$$

usemos la segunda ecuación: $x + y = 9 - 25$ hay dos posibilidades

$$x + y = 27 - 25 = 2$$

$$x + y = 36 - 25 = 11$$

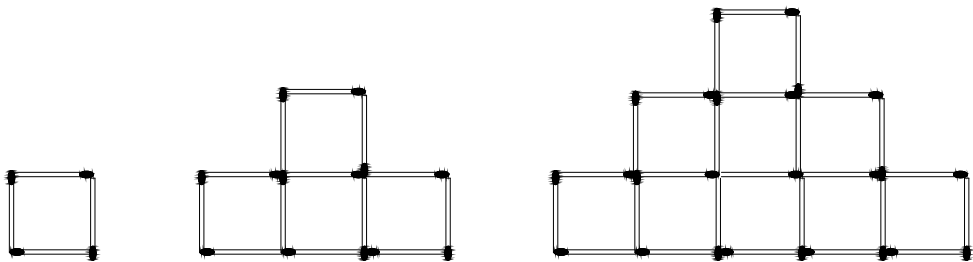
ahora sus soluciones son:

$x +$	y	$= 2$
2	0	
1	1	

$x +$	y	$= 11$
9	2	
8	3	
7	4	
6	5	
5	6	
4	7	
3	8	
2	9	

ensayamos estas soluciones en la primera ecuación y encontramos que la solución que la satisface es $x = 7$ y $y = 4$, pues: $x - y - 3 = 7 - 4 - 3 = 0$ el cual es múltiplo de 11, así los números que no se ven en la pantalla son el 7 y 4. ♣

4. Palitos de fosforo se usan para construir las siguientes figuras



Por ejemplo se usarón 4 palitos para construir la primera figura, 13 para la segunda figura, 26 para la tercera figura. Si se tienen 2016 palitos y se construye la mayor figura posible, diga que cuántos palitos de sobran.

Solución:

Observemos la ley de formación sobre el número de palitos para cada figura:

No. de figura	No. de palitos	Ley de formación
1	4	4
2	13	$4 + (4 \times 2 + 1) = (1 + 2) 2^2 + 1$
3	26	$(1 + 2) 2^2 + 1 + 6 \times 2 + 1 = (1 + 2 + 3) 2^2 + 2$
4	43	$(1 + 2 + 3) 2^2 + 2 + 8 \times 2 + 1 = (1 + 2 + 3 + 4) 2^2 + 3$
5	64	$(1 + 2 + 3 + 4) 2^2 + 3 + 10 \times 2 + 1 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5) 2^2 + 4$
\vdots	\vdots	\vdots
n -esima	x	$x = (1 + 2 + 3 + \dots + n) 2^2 + n - 1 = 2n^2 + 3n - 1$

estimemos n tal que se usen a lo más 2016 palitos, haciendo tanteos hallamos:

No. de figura	No. de palitos	Sobrantes
$n = 30$	$2n^2 + 3n - 1 = 1889$	127
$n = 31$	$2n^2 + 3n - 1 = 2014$	2

♣

